2015 年解析学特別演習 I テスト (12)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] $f \in L^1(\mathbb{R})$ で，すべての $g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $f * g = g$ となるものは存在しないことを示せ.

[2] μ, ν を $(X, \mathcal{B})$ 上の測度とし，$\mu(X) < \infty$, $\nu(X) < \infty$ であって，ν は μ について絶対連続であるとする．このとき，ν の μ についての Radon-Nikodym 密度関数を $h(x)$ とする.
(1) μ についてほとんどいたるところ $h(x) \geq 0$ であることを示せ.
(2) X 上の $[0, \infty)$ に値を持つ可測関数 $f(x)$ と $E \in \mathcal{B}$ について，$\displaystyle\int_E f\,d\nu = \int_E fh\,d\mu$ であることを示せ.

[3] $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ を $(X, \mathcal{B})$ 上の測度とし，$\mu(X) < \infty$ かつ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(X) < \infty$ であるとする．すべての μ_k が μ について特異である時，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ も μ について特異であることを示せ．ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ とは $E \in \mathcal{B}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(E)$ を対応させる測度である.

[4] $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ を $(X, \mathcal{B})$ 上の測度とし，$\mu(X) < \infty$ かつすべての k について $\mu_k(X) < \infty$ であるとする．X 上の $[0, \infty)$ に値を持つ任意の可測関数 $f(x)$ について，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f\,d\mu_k = \int_X f\,d\mu$$

が成り立つとする.
(1) 各 μ_k は μ について絶対連続であることを示せ.
(2) μ_k の μ についての Radon-Nikodym 密度関数を $h_k(x)$ とする．μ についてほとんどいたるところ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = 1$ であることを示せ.