2015 年解析学特別演習 I テスト (10) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は 1 問 25 点です．平均点は 37 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] Hölder の不等式の等号成立条件を調べればいいので，答えは $\|f\|_p$ です.

[2] たとえば
$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & (0 < x < 1 \text{ の時}), \\ 0, & (\text{その他の時}), \end{cases}$$
とおけば O.K. です.

[3] (1) Cauchy-Schwarz の不等式より $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\,dy \le \|f\|_2\|g\|_2$ となるので可積分です.

(2) x を固定して $h \to 0$ としたとき，$f(x+h-y)$ は y の関数として $f(x-y)$ に L^2-ノルムで収束するので Cauchy-Schwarz の不等式より連続性が出ます.

(3) f, g を $C_0(\mathbb{R})$ の元で，L^2-ノルムについて近似すればできます.

[4] たとえば
$$h(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{|x|}, & (0 < |x| < 1 \text{ の時}), \\ 0, & (\text{その他の時}), \end{cases}$$
とおきます．有理数全体に番号をつけて，$p_0 = 0, p_1, p_2, \ldots$ とし，$f(x) = g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} h(x - p_k)$ とおきます．これらは $L^1(\mathbb{R})$ の元です．$f(p_m - x)g(x) \ge \dfrac{1}{2^m} h(x)^2$ なのでこれは x の関数として可積分ではありません．$\{p_m\}$ は稠密なのでこれで求めるものが得られました.