

2015 年解析学特別演習 I テスト (10)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とし, $f \in L^p(\mathbb{R})$ を取る。

$$\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx\right| \mid g \in L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q \leq 1\right\}$$

を求めよ。

[2] すべての $p \in [1, \infty)$ について $f \in L^p(\mathbb{R})$ だが $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$ となるような f の例を挙げよ。

[3] $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ とする。

(1) $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$ の右辺はすべての $x \in \mathbb{R}$ について可積分であることを示せ。

(2) $f * g$ は連続であることを示せ。

(3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$ であることを示せ。

[4] $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ であるが, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$ の右辺が可積分ではない $x \in \mathbb{R}$ が稠密に存在するような f, g の例を挙げよ。