2015 年解析学特別演習 I テスト (9) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は 1 問 25 点です．平均点は 43 点，最高点は 100 点 (5 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合族をそれぞれ $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_{n+m}$ とおき，Borel 完全加法族を $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_{n+m}$ とおく．

まず

$$\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid B \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$

とおく．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}$ であり，$\mathcal{B}$ は完全加法族なので，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ である．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$ に対して $B \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{B}_{n+m}$ である．同様にして，任意の $B \in \mathcal{B}_m$ に対して $\mathbb{R}^n \times B \in \mathcal{B}_{n+m}$ である．

次に，

$$\mathcal{B}' = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } U \in \mathcal{U}_m \text{について } B \times U \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$

とおく．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}'$ であり，また $B^c \times U = \mathbb{R}^n \times U \setminus B \times U$ であることより，$\mathcal{B}'$ は完全加法族である．このことより，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'$ である．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$, 任意の $U \in \mathcal{U}_m$ に対して $B \times U \in \mathcal{B}_{n+m}$ である．同様にして，任意の $U \in \mathcal{U}_n$, $B \in \mathcal{B}_m$ に対して $U \times B \in \mathcal{B}_{n+m}$ である．

次に，

$$\mathcal{B}'' = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } E \in \mathcal{B}_m \text{について } B \times E \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$

とおく．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}''$ であり，また $B^c \times E = \mathbb{R}^n \times E \setminus B \times E$ であることより，最初に証明したことが使えて $\mathcal{B}''$ は完全加法族である．このことより，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''$ である．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$, 任意の $B' \in \mathcal{B}_m$ に対して $B \times B' \in \mathcal{B}_{n+m}$ である．このことから，$\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族が $\mathcal{B}_{n+m}$ に含まれることがわかる．

逆に，$U \in \mathcal{U}_{n+m}$ とすると，$U = \bigcup_{k=1}^\infty V_k \times W_k$ ($V_k \subset \mathbb{R}^n, W_k \subset \mathbb{R}^m$ はいずれも，中心の座標がすべて有理数で半径も有理数であるような開球) と書けるので，$\mathcal{U}_{n+m}$ は $\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族に含まれ，$\mathcal{B}_{n+m}$ が $\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族に含まれることがわかる．

[2] (1) たとえば

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & (0 < x < 1 \text{ の時}), \\ 0, & (\text{その他の時}), \end{cases}$$

(2) たとえば $f(x) = 1/(1+|x|)$.

[3] まず $\{t_k\}$ を任意にとる．$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_1=0$ なので，$\{t_k\}_k$ の部分列 $\{t_{k_m}\}_m$ をうまく取れば，$\lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x)=f(x)$ a.e. となる．

[4] $\{f_k\}_k$ の部分列 $\{f_{k_m}\}_m$ をうまくとれば $\lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x)=f(x)$ a.e. となる．さらに $\{f_{k_m}\}_m$ の部分列 $\{f_{k_{m_l}}\}_l$ をうまくとれば $\lim_{l\to\infty} f_{k_{m_l}}(x)=g(x)$ a.e. となる．よって，$f(x)=g(x)$ a.e. である．