

2015 年解析学特別演習 I テスト (9)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] \mathbb{R}^n の Borel 完全加法族と \mathbb{R}^m の Borel 完全加法族の直積完全加法族は \mathbb{R}^{n+m} の Borel 完全加法族に等しいことを示せ。

[2] (1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f \notin L^2(\mathbb{R})$, となる f の例を挙げよ。

(2) $f \notin L^1(\mathbb{R})$ かつ $f \in L^2(\mathbb{R})$, となる f の例を挙げよ。

[3] $f \in L^1(\mathbb{R})$ を取る。 $t_1 > t_2 > \cdots > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$ となる数列 $\{t_k\}_k$ をうまくとれば, $f_k(x) = f(x - t_k)$ とおいたとき, $\{f_k(x)\}_k$ がほとんどいたるところ $f(x)$ に収束することを示せ。

[4] $f_1, f_2, f_3, \dots \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とし, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_2 = 0$$

であるとき, ほとんどいたるところ $f(x) = g(x)$ となることを示せ。