

2015 年解析学特別演習 I テスト (8) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は 1 問 25 点です。平均点は 58 点，最高点は 100 点 (7 人) でした。解答は略解です。実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります。

[1] (1) 積分記号下での微分を行ったあと，部分積分をして， $I'(\alpha) = -\alpha I(\alpha)/2$ です。

(2) (1) の微分方程式と， $I(0) = \sqrt{\pi}/2$ より， $I(\alpha) = \sqrt{\pi}e^{-\alpha^2/4}/2$ です。

[2] (1) Fatou の補題よりただちに出ます。

(2) 例はたくさんありますが， $X = [0, 1]$ として， $f_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x)$ とおけばできます。

[3] (1) 前にやったように，Lebesgue の収束定理ですぐにできます。

(2) (1) を $|f|$ に対して適用し， C を， $\int_{\{|f(x)|>C\}} |f| d\mu < \varepsilon/2$ となるようにとりま
す。 $\delta = \varepsilon/(2C)$ とおくと， $|f|$ の B 上の積分を $|f| > C$ の部分と $|f| \leq C$ の部分に分けることができ，いずれも $\varepsilon/2$ で抑えられるので合計は ε で抑えられます。

[4] 左辺は $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t-x)\chi_B(t) dt dx$ に等しいので Fubini の定理を使って積分順序を入れ替えれば，結論が出ます。