

2015 年解析学特別演習 I テスト (7) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

配点は 1 問 25 点です。平均点は 58.0 点, 最高点は 100 点 (5 人) でした。解答は略解です。実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります。

[1] $x^n e^{-x^4}$ が t によらない可積分関数であることから, 積分記号下での微分が何回でもできます。

[2] 積分を $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-t) dx$ と書きかえれば, t による積分記号下の微分が何回でもできるようになります。

[3] χ_E は \mathbb{R} 上の可積分関数なので, 授業でやった結果より,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x-t) - \chi_E(x)| dx = 0$$

です。被積分関数の絶対値の中の取る値は $0, \pm 1$ なので, この絶対値は

$$(\chi_E(x-t) - \chi_E(x))^2 = \chi_E(x-t) + \chi_E(x) - 2\chi_{E \cap (E+t)}(x)$$

に等しく, これを積分して, $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(E \cap (E+t)) = \mu(E)$ を得ます。

[4] $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$, $\mu(X) = \mu(\emptyset) = 0$ とおけばこれは完全加法族とその上の測度です。これは完備ではなく, この完備化は, X のすべての部分集合の族を $\bar{\mathcal{B}}$ としたもので, その上ですべての $A \subset X$ に対し, $\bar{\mu}(A) = 0$ です。