2015 年解析学特別演習 I テスト (6) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は 1 問 25 点です．平均点は 62.0 点，最高点は 100 点 (5 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] 例はたくさんありますが例えば次のようにします．

$X=(0,\infty)$ とおき，Lebesgue 可測集合，Lebesgue 測度を考えます．$g_k(x)=\chi_{(k,k+1]}(x)$, $h_k(x)=\chi_{(k,k+2]}(x)$ とおき，

$$g_1,h_1,g_1,g_2,h_1,h_2,g_1,g_2,g_3,h_1,h_2,h_3,g_1,g_2,g_3,g_4,\dots$$

と並べたものを f_k とすればできます．

[2] 授業でやった通り，単調収束定理，または Lebesgue の収束定理からすぐでます．

[3] 任意の $\varepsilon>0$ に対し，コンパクト台の複素数値連続関数 g で，$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon$ となるものが取れます．

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_E(x+t)\,dx\right|\le\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\chi_E(x+t)\,dx\right|+\varepsilon$$

であり，また

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\chi_E(x+t)\,dx=\int_{\mathbb{R}} g(x-t)\chi_E(x)\,dx$$

については，$|g(x-t)\chi_E(x)|\le(\sup_x|g(x)|)\chi_E(x)$ で $\lim_{t\to\infty} g(x-t)\chi_E(x)=0$ と $(\sup_x|g(x)|)\chi_E(x)$ が可積分であることより Lebesgue の収束定理が使えて，$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(x)\chi_E(x+t)\,dx=0$ となります．これより，$\limsup_{t\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_E(x+t)\,dx\right|\le\varepsilon$ となり，結論が出ます．

いきなり Lebesgue の収束定理を使うことはできません．

[4] $g_k(x)=f(x)/k$ とおけばすぐです．