2015 年解析学特別演習 I テスト (6)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] 次のすべての条件を満たす測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ とその上の可測関数列 $\{f_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ の例を挙げよ．

(1) すべての $x\in X$ について $0\le f_k(x)<\infty$.

(2) どの $x\in X$ についても $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ は無限大を含めても存在しない．

(3) $\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu$ は無限大を含めても存在しない．

(4) $\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,d\mu < \liminf_{k\to\infty}\int_X f_k(x)\,d\mu$.

[2] f を $\mathbb{R}$ 上の複素数値 Lebesgue 可積分関数とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し $N>0$ が存在して，$\left|\int_{\{|x|>N\}} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$ となることを示せ．

[3] f を $\mathbb{R}$ 上の複素数値 Lebesgue 可積分関数，E を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合で $\mu(E)<\infty$ とする．$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_E(x+t)\,dx=0$ であることを示せ．

[最初 $\mu(E)<\infty$ の条件が抜けていました．すみません．]

[4] $g(x)$ を測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の可測関数で，$[0,\infty)$ に値を持ち，$\int_X g\,d\mu=\infty$ となるものとする．この時以下のすべての条件を満たす X 上の可測関数の列 $\{f_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ が存在することを示せ．

(1) すべての $x\in X$ について $0\le f_k(x)\le g(x)$.

(2) すべての $x\in X$ について $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0$.

(3) すべての k について $\int_X f_k\,d\mu=\infty$.