2015年解析学特別演習Iテスト(4)解答解説

河東泰之(かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室(電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は1問25点です．平均点は58.0点，最高点は100点(5人)でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] (1) (2) 定義通り確認すればできます．

[2] すべての整数 $n \geq 1$ に対し，$\mu(E(f > 1/n)) = 0$ であることがわかります．n について和を取って $\mu(E(f > 0)) = 0$ がわかります．

[3] Lebesgue 可積分ではありません．$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ に帰着します．

[4] $\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in [0,1] | f_n(x) > k\}) = 0$ なので，$C_k > 0$ を，$E_k = \{x \in [0,1] | f_n(x) > C_k\}$，$\mu(E_k) < 1/2^k$ となるようにとります．$a_k = 1/(2^k C_k)$ とおけば，$[0,1] \setminus \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$ 上で $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ は収束します．$\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k) < 2/2^m$ で m はいくらでも大きく取れるので，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ はほとんどいたるところ収束します．