

2015 年解析学特別演習 I テスト (1)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] Cauchy の積分定理のステートメントを書け。(少しずつ違うさまざまなバージョンがあるがどれでもよい。)

[2] (1) 位相空間が Hausdorff であることの定義を書け。

(2) 位相空間の部分集合 K がコンパクトであることの定義を書け。

(3) Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉であることを示せ。

(4) 上の (3) で Hausdorff 性を落とすと結論が成り立たない例を挙げよ。

[3] $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_n$ で以下の条件をすべて満たすものの例を挙げよ。

(1) 各 f_n は実数値連続関数である。

(2) すべての $x \in [0, 1]$, n について $0 \leq f_n(x)$ である。

(3) すべての $x \in [0, 1]$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ である。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \infty$ である。

[4] \mathbb{R} 上の連続関数 $f(x)$ で次の条件すべてを満たすものの例を挙げよ。

(1) すべての $x \in \mathbb{R}$ について $0 \leq f(x)$ である。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \infty$.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx < \infty$.

[5] $(0, \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ で次の条件すべてを満たすものの例を挙げよ。

(1) すべての $x \in (0, \infty)$ について $0 \leq f(x)$ である。

(2) $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$.

(3) $\int_0^{\infty} f(x)^2 dx = \infty$.