2015 年解析学 IVa (ターム講義) レポート問題

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

レポート用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．

[1] 空でない集合 X に対し，$B \subset X$, $B \neq \varnothing$, $B \neq X$ となる B を取る．$\mathcal{F} = \{\varnothing, B, B^c, X\}$ とおけばこれは有限加法族である．$m(B) = m(\varnothing) = 0$, $m(B^c) = m(X) = \infty$ とおくと，これは $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度である．この m から授業のように作った外測度 Γ はどのようなものか，また Γ-可測集合はどのようなものか，具体的に記述せよ．

[2] $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への Lebesgue 可測関数 $f(x)$ で，すべての点で不連続であるものの例を一つあげよ．

[3] f を $\mathbb{R}^n$ 上の複素数値 Lebesgue 可積分関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N > 0$ が存在して，$\left| \int_{\{|x|>N\}} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$ となることを示せ．

[4] 以下の等式を示せ．

$$\lim_{t \to 0} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t} (e^x - 1)^{-1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

[5] 自然数の集合の上に適当な測度を入れることにより，無限級数の理論は Lebesgue 積分の理論の特別な場合とみなすことができる．これによって，Fatou の補題を無限級数の場合に適用したらどのようなステートメントになるか，書け．