2000 年度 3 年生解析学 IV 期末テスト

河東泰之
2000 年 9 月 5 日
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は解答用紙に書いてください．この試験はノート持ち込み可で行います．試験時間は 13:00～16:00 です．

[1] 次の 4 条件すべてを満たす，$[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_n$ の例をあげよ．根拠をきちんと説明すること．

(1) 各 $f_n(x)$ は $[0,1]$ 上連続で，$f_n(x) \geq 0$ を満たす．

(2) すべての $p \in [1,\infty)$ に対して，$n \to \infty$ のとき $\|f_n\|_p \to 0$ である．

(3) すべての $x \in [0,1]$ に対し，$n \to \infty$ のとき $f_n(x) \to 0$ である．

(4) $n \to \infty$ のとき，$\displaystyle\sup_{0\leq x\leq 1} f_n(x) \to \infty$ である．

[2] $t > 0$ に対し，

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

とおく．

(1) $F'(t)$ を求めよ．

(2) $F(t)$ を求めよ．

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) = 1$ を満たすものとする．$f(x), g(x)$ は X 上の正値可測関数で，ほとんどいたるところ $f(x)g(x) \geq 1$ を満たすとする．このとき $\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu \int_X g(x)\, d\mu \geq 1$ であることを示せ．

[4] $\{f_n(x)\}_{n=1,2,3,\ldots}$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数の列とする．どの a_n も 0 ではないような実数列 $\{a_n\}_n$ で，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)$ が $\mathbf{R}$ 上ほとんどいたるところ絶対収束するようなものが存在することを示せ．

[5] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-finite な測度空間とする．この時，$L^1(X) = L^2(X)$ となるための必要十分条件を求めよ．ただし条件はなるべく簡明な形で求めること．論理的に正しくても，不必要に複雑な条件の場合は減点することがある．