解析学 IV 小テスト No. 13 略解・解説

2000 年 7 月 18 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回は問題にミスプリントが多くてすみませんでした．

今回の配点は [1] から順に 30, 20×2, 30 点で，平均は 17.8 点，最高は 75 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の勝良君です．簡単な解説をつけます．

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^n |\Phi(E_k)| \le \int_E |f(x)|\, d\mu$ であることは簡単ですから左辺の sup を取っても不等号はこのままです．ここまでで 10 点です．

逆向きは $f(x)$ の値域の方を ε きざみの正方形に分割すれば，小さい正方形上での偏角をほぼ打ち消しあうことができるので O.K. です．(小さい誤差を許せば正方形は有限個で済み，各正方形の逆像を E_k とすれば O.K. です．) あるいは単関数での近似でも同様に偏角を打ち消せます．単純に「実部と虚部に分ければ最初から実数値としてよい」というのは誤りです．

[2] $\mu(E) < \infty$ という条件が最初抜けていて訂正しました．どうもすみません．

(1) χ_E が L^1 なので，平行移動が L^1-norm について連続なことからできます．あるいは同じことですが，χ_E を compact 台の連続関数で近似してもできます．

(2) $f(0) > 0$ なので，$\delta > 0$ を $|x| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ であるように取ります．このとき，$|x| < \delta$ ならば $x \in \tilde{E}$ であることがわかります．

[3] 左辺の積分は

$$\int_{\mathbf{R}} \int_R \chi_{A+x}(y)\chi_B(y)\, dy\, dx = \int_{\mathbf{R}} \int_R \chi_{y-A}(x)\chi_B(y)\, dy\, dx$$

に等しいことが簡単にわかりますが，ここで Fubini の定理を使って積分の順序を入れ替えると，$\mu(A)\mu(B)$ が出てきます．Fubini が使えるのは関数が正値で可測だからです．この根拠をきちんと述べていないものは 20 点の減点です．

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX