解析学 IV 小テスト No. 13

2000 年 7 月 4 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を考え，$E \in \mathcal{B}$ 上の複素数値可積分関数 $f(x)$ を考える．$F \subset E, F \in \mathcal{B}$ となる F について $\Phi(F) = \int_F f(x)\, d\mu$ とおく．$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ (disjoint union) という有限個の $\mathcal{B}$ の元への分割を考えたとき，

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |\Phi(E_k)| = \int_E |f(x)|\, d\mu$$

であることを示せ．ただし左辺の sup は，上のようなあらゆる E の分割についての上限である．

[2] E を $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測部分集合とし，$0 < \mu(E) < \infty$ とする．(μ は Lebesgue 測度である．) このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \int_{\mathbf{R}} \chi_E(x+y)\chi_E(y)\, dy$ とおくと，これは x の連続関数であることを示せ．

(2) 集合 $\tilde{E} = \{x - y \mid x, y \in E\}$ は 0 を内点として含むことを示せ．

[3] A, B を $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測部分集合とする．

$$\int_{\mathbf{R}} \mu((A+x) \cap B)\, dx = \mu(A)\mu(B)$$

を示せ．ただしここで，μ は Lebesgue 測度であり $A + x = \{y + x \mid y \in A\}$ である．