解析学 IV 小テスト No. 12

2000 年 6 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

時間は午後 1 時から午後 2 時半までの 90 分です.

解答は別紙に書いてください. 学生証番号, 氏名を一番上に書いてください. 解答用紙の裏面を使用してもけっこうです. 自分のノートを参照してかまいませんが, 本は見ないでください.

[1] $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ を σ-finite な測度空間, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を $\mu_Y(Y) = 1$ となる測度空間とし, その直積の完備化として得られる測度空間を $(X \times Y, \overline{\mathcal{B}}_{X\times Y}, \overline{\mu}_{X\times Y})$ とする. これに対し,

$$\mathcal{B} = \{E \subset X \mid E \times Y \in \overline{\mathcal{B}}_{X\times Y}\}$$

とおき, さらに $E \in \mathcal{B}$ に対し $\mu_0(E) = \overline{\mu}_{X\times Y}(E \times Y)$ とおく. このとき $(\mathcal{B}, \mu_0)$ と $(\overline{\mathcal{B}}_X, \overline{\mu}_X)$ は等しいか. 理由をつけて答えよ.

[2] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数, $g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数とする. このとき合成関数 $g(f(x))$ は Lebesgue 可測であることを示せ.

[3] $f(x)$ を $[0, 1]$ 上の複素数値可積分関数とする. 次に

$$g(x) = \begin{cases} -1, & n \le x < n + \dfrac{1}{2} \text{ となる整数 } n \text{ があるとき}, \\ 1, & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

と定め, 自然数 k について $g_k(x) = g(2^k x)$ とおく.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f(x) g_k(x)\, dx = 0$$

を示せ.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX