# 解析学 IV 小テスト No. 11 略解・解説

2000 年 7 月 11 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 30, 30, 40 点で，平均は 26.3 点，最高は 80 点 (2 人) でした．採点は Teaching Assistant の勝良君です．簡単な解説をつけます．

[1] $E$ は Borel としてかまいません．Lebesgue 可測な $A \subset \mathbf{R}$ のうち，$\mu(A\cap E) = \mu(A)/2$ となるもの全体は完全加法族をなし，開区間がすべて入るので，Borel 集合もすべて入ります．$A = E \cap [-n, n]$ とおけば，$\mu(A) = \mu(A)/2 < \infty$ より $\mu(A) = 0$ がわかり，$\mu(E) = 0$ となって矛盾します．

[2] 外側と内側からの可測集合による近似を使って，両方向きの不等号を示します．$\Gamma_{X\times Y}(A\times B) \le \Gamma_X(A)\Gamma_Y(B)$ の方は $A, B$ をそれぞれ外側から $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ の元で覆うことにより簡単に得られます．

逆向きのためには，$A \times B$ を，$\bigcup_n E_n \times F_n$ (disjoint union), $E_n \in \mathcal{B}_X$, $F_n \in \mathcal{B}_Y$ のように覆っておいて，$\mu_{X\times Y}(\bigcup_n E_n \times F_n)$ を Fubini の定理を使って下から評価します．

[3] 単関数で $f(x)$ を下から近似していけば普通にできます．