解析学 IV 小テスト No. 11

2000 年 6 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

時間は午前 10 時から正午までの 2 時間です.

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください.

[1] $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合 E で次の性質を満たすものは存在しないことを示せ．ただし，μ は $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度を表す.
「任意の有界開区間 (a,b) について $\mu((a,b)\cap E)=(b-a)/2$ が成り立つ.」

[2] $(X,\mathcal{B}_X,\mu_X)$, $(Y,\mathcal{B}_Y,\mu_Y)$ をそれぞれ σ-finite な測度空間とし，直積として得られる測度空間を $(X\times Y,\mathcal{B}_{X\times Y},\mu_{X\times Y})$ とする．$\mu_X,\mu_Y,\mu_{X\times Y}$ を有限加法的測度と思ってこれらから作った $X,Y,X\times Y$ 上の外測度をそれぞれ $\Gamma_X,\Gamma_Y,\Gamma_{X\times Y}$ とする．$A\subset X, B\subset Y$ のとき，$\Gamma_{X\times Y}(A\times B)=\Gamma_X(A)\Gamma_Y(B)$ であることを示せ.

[3] $(X,\mathcal{B}_X,\mu_X)$ を σ-finite な測度空間，$(\mathbf{R},\mathcal{B},\mu)$ を Lebesgue 測度空間とし，これらの直積として得られる測度空間を $(X\times\mathbf{R},\mathcal{B}_{X\times\mathbf{R}},\mu_{X\times\mathbf{R}})$ とする．$f(x)$ は $E\in\mathcal{B}_X$ 上の可測関数で，$f(x)\in[0,\infty)$ を満たすものとする．$X\times\mathbf{R}$ の部分集合

$$F=\{(x,y)\mid x\in E, 0\le y<f(x)\}$$

は $\mathcal{B}_{X\times\mathbf{R}}$-可測集合であって，$\mu_{X\times\mathbf{R}}(F)=\displaystyle\int_E f(x)\,d\mu$ であることを示せ.