解析学 IV 小テスト No. 9 略解・解説

2000 年 7 月 4 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 40, 30, 30 点で，平均は 34.8 点，最高は 90 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の岸本君です．簡単な解説をつけます．

[1] 2 つの完全加法族をそれぞれ $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ とします．$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ を示すには，Borel 集合 E, F を取ったときに，$E \times F$ が $\mathbf{R}^2$ の Borel 集合であることを示せば十分です．これには，$E \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times F$ がそれぞれ $\mathbf{R}^2$ の Borel 集合であることを示せばよく，それは Borel 集合の定義からわかります．

逆に $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ であることは，$\mathbf{R}^2$ の開集合の basis として，開区間の直積が取れることからわかります．

[2] $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 非可測集合 A を取り，$A \times \{0\}$ を考えればだいじょうぶです．これは $\mathbf{R}^2$ では外測度 0 なので，Lebesgue 可測です．もしこれが Borel だとすると，[1] より Borel 集合族の直積完全加法族に入るので，Fubini の定理より，切り口である A も Borel 集合，したがって Lebesgue 可測になってしまって矛盾です．

[3] 等しいというのが答えです．順番に定義をチェックしていけばできます．