解析学 IV 小テスト No. 8 略解・解説

2000 年 6 月 20 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 40, 30, 30 点で，平均は 31.1 点，最高は 95 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の勝良君です．簡単な解説をつけます．

[1] $f(x)$ がほとんどいたるところ 0 に等しいときは，α にかかわりなく答えは 0 です．それ以外のときを以下考えます．
$\alpha \geq 1$ のときは被積分関数は $\alpha f(x)$ で上から抑えられて Lebesgue の収束定理が使えます．(ここがほとんどできてませんでした．) $\alpha < 1$ のときは Fatou の lemma を使えば O.K. です．答えは

$$\begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1 \text{ のとき}, \\ \displaystyle\int_X f(x)\,d\mu, & \alpha = 1 \text{ のとき}, \\ 0, & 1 < \alpha < \infty \text{ のとき}, \end{cases}$$

です．

[2] 単調収束定理より与えられた式は

$$-\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} -x^n \log x\right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 -x^n \log x\, dx$$

に等しいことがわかります．各項について部分積分すれば答えは $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$ です．($-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ のままで終わりにしても O.K. です．)

[3] $x = \sqrt{t}y$ と置換積分してから $t \to 0+$ として Lebesgue の収束定理を使えば $f(0)$ が答えになります．