解析学 IV 小テスト No. 7 略解・解説

2000 年 6 月 6 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 30, 30, 40 点で，平均は 34.5 点，最高は 100 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の勝良君です．簡単な解説をつけます．

[1] もちろんいろいろ答えはありますが，簡単なものとしては次のものがあります．まず

$$h(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1 \text{ のとき,} \\ 0, & \text{それ以外のとき,} \end{cases}$$

とおきます．ついで，$h_n(x) = nh(e^n(x-n))$ として $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) + e^{-x^2}$ とすれば O.K. でしょう．e^{-x^2} を足してあるのは単に $f(x) > 0$ にするためです．

[2] まず積分と Lebesgue 測度の定義より，

$$\int_E f(x-t)\,dx = \int_{E+t} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \chi_{E+t}(x) f(x)\,dx$$

となっています．ただしここで $E+t = \{x+t \mid x \in E\}$ のことです．$t \to \infty$ のとき，E が有界なことより各点 x において $\chi_{E+t}(x)f(x) \to 0$ となっています．$|\chi_{E+t}(x)f(x)| \le |f(x)|$ で $f(x)$ は可積分と仮定しているので Lebesgue の収束定理が使えて答えが出ます．

[3] まず，$|x| \le 1$ の範囲では $f(x)$ が有界，したがって可積分なので $|x|^n f(x)$ も可積分です．

次に，$|x| > 1$ の範囲では $|x|^{n+2} f(x)$ が有界という仮定より，$|x|^n f(x)$ が可積分になります．すると積分記号下での微分ができる形になって，C^∞ 級であることが示せます．