解析学 IV 小テスト No. 6

2000 年 5 月 23 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n}\,dx.$$

[2] 自然数の集合の上に適当な測度を入れることにより，無限級数の理論は Lebesgue 積分の理論の特別な場合とみなすことができる．

(1) これによって，Lebesgue の収束定理を無限級数の場合に適用したらどのようなステートメントになるか．

(2) 上のステートメントを，Lebesgue 積分の理論を使わずに直接証明せよ．

[3] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とし，$f(x)$ をその上の複素数値可測関数で $\displaystyle\int_X |f(x)|^2\,d\mu<\infty$ を満たすものとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対し，X 上の有界可測関数 $g(x)$ で，

$$\int_X |g(x)|^2\,d\mu<\infty,$$
$$\int_X |f(x)-g(x)|^2\,d\mu<\varepsilon$$

を満たすものが存在することを示せ．

[4] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の可積分関数で，$0\le f(x)<\infty$ を満たすものとする．次の 2 条件を満たす数列 $\{a_n\}_n$ と $\mathbf{R}$ 上の可積分関数 $g(x)$ が存在することを示せ．

(a) $a_1>a_2>a_3>\cdots\to 0$.

(b) すべての n について，ほとんどいたるところ $f(x-a_n)\le g(x)$ がなりたつ．

ただし考えている測度は $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度である．