解析学 IV 小テスト No. 4 略解・解説

2000 年 5 月 16 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 35, 35, 30 点です．採点は Teaching Assistant の岸本君です．平均は 28.0 点，最高は 97 点 (1 人) でした．測度論の基礎的な部分は終わったので，少し本格的 (?) な問題にしてみましたがそのせいか，できはよくありませんでした．簡単な解説をつけます．

[1] $g_k(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ とおくと，講義でやったことより，$-\infty = \displaystyle\liminf_{k\to\infty} g_k(x)$, $\displaystyle\liminf_{k\to\infty} g_k(x) < \limsup_{k\to\infty} g_k(x)$, $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} g_k(x) = \infty$ のいずれかが成り立つ点 x 全体の集合は可測集合 ($\mathcal{B}$ の元) です．それ以外の点では，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が有限の値，$\displaystyle\liminf_{k\to\infty} g_k(x) = \limsup_{k\to\infty} g_k(x)$ に収束しているので，結局あわせて $f(x)$ は可測関数であることがわかります．

[2] Γ-可測集合は，

$$E_n = \begin{cases} I_n \text{の任意の部分集合} & a_n = 0, \infty \text{ のとき}, \\ \varnothing \text{または } I_n & \text{その他のとき}, \end{cases}$$

と言う形の E_n によって $E = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} E_n$ と表せるような E の全体です．

また実数値可測関数は,「$0 < a_n < \infty$ であるような n については I_n 上定数であるような関数」です．(その他の n については制限はありません．)

いずれもまじめに定義をたどっていけばできます．注意すべきなのは $a_n = 0, \infty$ のときの処理だけです．$a_n = \infty$ のときの考慮を忘れている人がかなりいました．

[3] U が空集合のときは明らかに答えは $\{0\}$ なのでその他の場合を考えます．(この場合は trivial なので別に考えていなくても減点はしていません．)

U 内の稠密な可算集合を $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とします．$\varepsilon > 0$ を任意に取り，$E = U \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n})$ とおくと，これは U 内の稠密開集合で，その測度は 2ε 以下です．次に $t \in [0, \infty)$ について $E_t = ((-t, t) \cup E) \cap U$ とおくと，これも U 内の稠密開集合です．また $\mu(E_t)$ は t の実数値連続関数であることがすぐにわかり，また $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \mu(E_t) = \mu(U)$ なので，Φ の元の Lebesgue 測度として取りうる値の集合は，$(2\varepsilon, \mu(U)]$ を含みます．ここで $\varepsilon > 0$ が任意であったことより，求める値の集合は $(0, \mu(U)]$ を含みます．一方，求める値の集合がこれに含まれることは明らかなので，結局答えは $(0, \mu(U)]$ です．

多くの人が，$\mu(U)$ しか取りえないことを示そうとしていましたがそれは誤りです．