解析学 IV 小テスト No. 4

2000 年 5 月 9 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] $\{f_n(x)\}_n$ を，測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の上の実数値可測関数列とする．X 上の実数値関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ が有限の値に収束するとき}, \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

このとき $f(x)$ も可測関数であることを示せ．

[2] 整数 n に対して $I_n = (n, n+1]$ とおき，I_n たちの disjoint union として表される集合全体のなす，$\mathbf{R}$ 上の完全加法族を $\mathcal{F}$ とする．$a_n \in [0, \infty]$ $(n \in \mathbf{Z})$ に対し，$\mathcal{F}$ 上の完全加法的測度 m を，$m(I_n) = a_n$ によって定め，この m から通常のように作った $\mathbf{R}$ 上の外測度を Γ とする．この Γ について，Γ-可測集合とはどのようなものか具体的に答えよ．

また，Γ-可測集合全体のなす完全加法族を $\mathcal{B}$ としたとき，これについて可測な実数値関数とはどのようなものか具体的に答えよ．

[3] U を $\mathbf{R}$ の開集合とし，U の稠密な開部分集合全体の集合を Φ とする．Φ の元の Lebesgue 測度として取りうる値の集合を決定せよ．