解析学 IV 小テスト No. 3

2000 年 4 月 25 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] 自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ の部分集合 A で,「A または A^c が有限集合である」というようなもの全体を集めて得られる $\mathbf{N}$ 上の有限加法族を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ 上の完全加法的測度とはどのようなものか．具体的に記述せよ．

[2] 4/18 の授業のように，実数の集合 $\mathbf{R}$ の部分集合で，$A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$, (disjoint union) の形のもの全体のなす有限加法族を $\mathcal{F}$ とする．($n = 0$ のときは，$A = \varnothing$ と解釈し，また $b_j = \infty$ のときは，$(a_j, \infty] = (a_j, \infty)$ と解釈する．) 一方，$\mathbf{R}$ 上の関数 $H(x)$ を

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ の時,} \\ 0, & x < 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

とおき，有理数全体に番号を付けて $\mathbf{Q} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ とする．(もちろん，$n \neq m$ ならば $p_n \neq p_m$ とする．) ここで

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - p_n)$$

とおいて，この増加関数 $f(x)$ を使って，4/18 の授業のように $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度 m を定める．この m はどのようなものか，具体的に記述せよ．またこの m が完全加法的かどうか，理由をつけて答えよ．

[3] $\mathcal{F}$ を X 上の有限加法族，m をその上の有限加法的測度で，$m(X) < \infty$ であるものとする．このとき以下の 2 条件は同値であることを示せ．

(1)

$$\begin{cases} E_j \in \mathcal{F}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \\ \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \varnothing \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{j \to \infty} m(E_j) = 0.$$

(2) m は完全加法的である．