解析学 IV 小テスト No. 1

2000 年 4 月 11 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^t}$ が有限な値を持つような実数 $t>0$ の範囲を求めよ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^t}$ が収束するような実数 $t>0$ の範囲を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^t}$ が収束するような実数 $t>0$ の範囲を求めよ．

いずれもきちんと根拠を示すこと．

[2] $f(x)$ を有界閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数とする．

(1) Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の定義を述べよ．

(2) 上の定義は極限を含んでいるが，その極限値の存在を証明せよ．

[3] 次の条件すべてを満たすような，$\mathbf{R}$ 上の連続関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つあげよ.（その列が本当に下記の条件を満たしていることをきちんと説明すること.）

(1) $0 \le f_n(x) \le 1$.

(2) 任意の n に対し，広義積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,dx$ が (有限実数として) 存在する．

(3) 任意の n に対し，x_n が存在して $f_n(x_n)=1$.

(4) 任意の x に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,dx = \infty$.