解析学 IV 期末テスト

1997 年 9 月 8 日
河東泰之

問題用紙は 2 枚あります

自分のノートを参照してけっこうです．ただし，本の参照は不可です．時間は 3 時間です．問題はたくさんありますが，1 問 20〜30 点でつける予定なので，適当に選択して解いてください．

[1] 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ に対し，$A \in \mathcal{B}$が，$B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, $0 < \mu(B) < \mu(A)$ となるような Bを持たない時，A は atom であるという．

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は，$\mu(X) = 1$ を満たし，atom を持たないとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$A \in \mathcal{B}$で $0 < \mu(A) < \varepsilon$となるものが存在することを示せ．

[2] $\mu(X) = 1$ を満たす測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数 $f(x)$ が，すべての $x \in X$で $-\infty < f(x) < \infty$ を満たしているとする．正数εが，

$$A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \varepsilon \text{ならば } f \text{は } A \text{ 上可積分である}$$

と言う条件を満たしているとする．このとき，$f(x)$ は X上可積分であることを示せ．

[3] $f_n(x), f(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$, は，測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数で，X上 $0 \le f_n(x) \le f(x) \le \infty$ を満たすものとする．このとき，すべての $x \in X$に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx$$

であることを示せ．

[4] $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$ としたとき，

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x+t)g(x)\,dx = 0$$

であることを示せ．

[5] $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする．$f(x) \in L^p(\mathbf{R})$ のとき，$\sup_{\|g\|_q = 1} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\,dx \right|$を求めよ．

[6] $f(x)$ を $(0,1)$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数とし，すべての $p \in [1,\infty)$ について，$\int_0^1 |f(x)|^p \ dx < \infty$ であるとする．$g(p) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p}$ とした時，$g(p)$ は，$[1,\infty)$ 上単調増加で，連続な関数であることを示せ．

[7] $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R})$ のとき，

$$\int_{\mathbf{R}} (f * g)(x) e^{-ixt} \ dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ixt} \ dx \int_{\mathbf{R}} g(x) e^{-ixt} \ dx$$

であることを示せ．式変形の根拠をきちんと説明すること．ただし，t は実数である．

解答は答案用紙に書いて下さい．採点した答案はのちほど事務室から返却します．(河東は今イタリアにいるので，採点に少し時間がかかります．)