解析学 IV 期末テスト解説

1997 年 10 月 18 日

河東泰之

配点は 1 番から順に 25, 25, 20, 25, 20, 30, 20 点の 165 点満点です．最高点は 140 点で得点分布は次のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40-49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
15(人)	13	5	1	2	2	7	1	3

平均点は 41.5 点，3 年生だけの平均点は 46.3 点でした．34 点未満が D(25 人)，35 点〜49 点が C(8 人)，50〜79 点が B(5 人)，80 点以上が A(11 人) です．(これらのデータには期末試験を欠席した人は入っていません．) このうち C の 1 人は本来 D の点ですが，演習の小テストがよかったので C になりました．また前に予告した演習の成績が D だった人の 1 人は今回の成績がよかったので C になりました．(その他の人の演習の成績は夏休み前に予告したとおりです．)

どの問題もポイントは，ほぼ一つか二つに限られています．そのため，いくらたくさん書いてあっても重要なポイントが欠けている/間違っている答案はほとんど 0 点になっています．以下，そのポイントについて説明します．

[1] (25 点) すみません．Atom の定義に$\mu(A)>0$を入れるのを忘れていました．2 人の人が気づいていましたが，その他の人も含めて解答には差し支えていないようでしたので，採点には配慮しませんでした．

誰でも考えるのは，$X\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$ を，$\mu(X)>\mu(A_1)>\mu(A_2)>\mu(A_3)>\cdots$ となるように取っていくと言うものです．各 A_nが atom でないので，A_{n+1}が $0<\mu(A_{n+1})<\mu(A_n)$ となるように取れると言うわけです．しかしこれでは一般に，$\mu(A_n)$ が十分小さくなってくれません．たとえば，区間 $[0,1]$ で Lebesgue 測度を考えた時に，$A_n=[0,1/2+1/2^n]$ としてみれば，$\mu(A_n)$ はいつでも 1/2 以上のままです．これをどう避けるかがこの問題のポイントであり，それが書いていなければ 0 点です．主なやり方は 2 つあるので，両方について説明します．

第一の方法は，A_nから A_{n+1}を作る時に，$\mu(A_{n+1})$ と$\mu(A_n)-\mu(A_{n+1})$ を比べて前者の方が大きければ $A_n\setminus A_{n+1}$をあらためて A_{n+1}とおき直す，というものです．これをやれば毎回$\mu(A_n)$ は半分以下になっていくので，$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$ にできます．

第二の方法では，とにかくまず最初のように A_nたちを取ってしまいます．$\{\mu(A_n)\}_n$は正値単調減少数列なので極限を持ちます．だから，$\mu(A_n\setminus A_{n+1})\to 0$ がわかってこれで O.K. です．

この問題はこのポイントに気づくかどうかが問題なので，採点もほとんど 0 点か満点かになります．

[2] (25 点) まず,「すべての $x \in X$で$-\infty < f(x) < \infty$」ということと「$f(x)$ が有界」というのはまったく違うことです．この区別がつかないのは，即座に不可をつけられるに値する重大な間違いです．それからεの意味は，条件を満たすようなものが一つ与えられた，という意味です.

まず,「すべての $x \in X$で$-\infty < f(x) < \infty$」ということから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}) = 0$ がしたがいます．(ここで，$\mu(X) < \infty$ であることを使っています．) ですから，$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}) < \varepsilon$となるような，$n$ が取れます．この n に対し，$\{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$ 上では $f(x)$ は仮定により可積分となり，また，$\{x \in X \mid |f(x)| < n\}$ 上では $f(x)$ の有界性と$\mu(X) < \infty$ よりやはり $f(x)$ は可積分となるので，結局 $f(x)$ は全体で可積分になります.

この問題のポイントは，$f(x)$ の値によって集合 Xを二つに分け，$|f(x)|$ が大きいところでは仮定を使い，小さいところでは単に$\mu(X) < \infty$ を使う，ということです．この分け方に気づいていなければそれは 0 点です.

[3] (20 点) これは Fatou の lemma を使う問題です．それ以外のものでやろうとしているのは 0 点です．(たとえば,「部分列を取れば単調増大にできて単調収束定理が使える」というのがかなりありましたが，それは誤りです．そのような部分列は一般には取れません．)

まず Fatou の lemma によって,

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

です．次に各 n で，$\displaystyle\int_X f_n(x)\, d\mu \leq \int_X f(x)\, d\mu$ ですから左辺で $n \to \infty$ とした上極限を取って $\displaystyle\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu \leq \int_X f(x)\, d\mu$ となります．この二つを合わせれば結論が出ます.

あるいは次のようにもできます．もし，$\displaystyle\int_X f(x)\ d\mu < \infty$ であれば直ちに Lebesgue の収束定理が使えて結論が出ます．もし，$\displaystyle\int_X f(x)\ d\mu = \infty$ であれば，上と同様にして Fatou の lemma を使って得られる不等式から，$\displaystyle\infty \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu$がわかります．これは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \infty$ を意味しているのでやはり結論が成り立ちます.

[4] (25 点) この問題のポイントは $f(x), g(x)$ をもっとたちのよい関数でまず近似する，ということです.

$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{|x|\geq R} |f(x)|^2\ dx = 0$ なので，$g(x)$ についても同様に考えて，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，$\displaystyle\int_{|x|\geq R} |f(x)|^2\ dx < \varepsilon^2$, $\displaystyle\int_{|x|\geq R} |g(x)|^2\ dx < \varepsilon^2$が同時に成り立つような $R > 0$

をまず選びます．次に $t > 2R$とすると，

$$\int_{\mathbf{R}} f(x+t)g(x)\ dx = \int_{-R}^{R} f(x+t)g(x)\ dx + \int_{|x|\geq R} f(x+t)g(x)\ dx$$

としたあと，右辺第 1 項は，

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x+t)g(x)\ dx\right| \leq \left|\int_{-R}^{R} |f(x+t)|^2\ dx\right|^{1/2} \left|\int_{-R}^{R} |g(x)|^2\ dx\right|^{1/2} \leq \varepsilon\|g\|_2$$

と評価され，右辺第 2 項は，

$$\left|\int_{|x|\geq R} f(x+t)g(x)\ dx\right| \leq \left|\int_{|x|\geq R} |f(x+t)|^2\ dx\right|^{1/2} \left|\int_{|x|\geq R} |g(x)|^2\ dx\right|^{1/2} \leq \varepsilon\|f\|_2$$

と評価されます．これで結論が出ます．

いきなり Cauchy-Schwarz を使ってばらしている人がけっこういましたが，そうやったのでは全然できません．

あるいは，$L^2(\mathbf{R})$ の中で，ある有界区間の外では 0 になるような連続関数全体が dense になることを使っても同様にできますが，この dense になることは $L^1(\mathbf{R})$ のときしか授業でやっていないので，そのときの証明をまねしてまずこれを $L^2(\mathbf{R})$ に対して証明しておく必要があります．

[5] (20 点) まず，$\|f\|_p = 0$ のときは求める sup は明らかに 0 ですから，$\|f\|_p > 0$ の場合だけ考えます．

まず，Hölder の不等式から直ちに，$\|g\|_q = 1$ のときに

$$\left|\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\ dx\right| \leq \|f\|_p$$

となるので，求める sup は $\|f\|_p$で押さえられます．一方，$|g(x)|^q = |f(x)|^p/\|f\|_p^p$, $f(x)g(x) \geq 0$ となるように $g(x)$ を決めると $\|g\|_q = 1$ であり，また$\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\ dx = \|f\|_p$となるので，求める sup は $\|f\|_p$そのものであることがわかります．(これは $\|f\|_p = 0$ のときも正しい結論です．)

ポイントは Hölder の不等式を正しく使うことと，その等号成立条件をチェックすることです．前半だけだと 10 点です．

[6] (30 点) 配点は，単調増加と連続に 15 点ずつです．

まず，$p < p'$とします．このとき，$p/p' + 1/q = 1$ となる $q > 1$ が選べます．すると，$|f|^p = |f|^p \times 1$ と思って Hölder の不等式を使うと，

$$\int_0^1 |f(x)|^p\ dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p\ dx\right)^{p/p'} \times 1$$

を得ます．両辺 $1/p$ 乗すれば，求める単調増加性がわかります．

次に連続性は，$\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p \ dx$ が p の連続関数であることを示せば十分です．$f(x)$ を $|f(x)| < 1$ の部分と $|f(x)| \geq 1$ の部分に分けてそれぞれ $f_1(x), f_2(x)$ とします．すると $p_n \to p$ のとき，すべての n について $p_n \leq p'$ となる p' を選べば，

$$\int_0^1 |f(x)|^{p_n} \ dx = \int_0^1 |f_1(x)|^{p_n} \ dx + \int_0^1 |f_2(x)|^{p_n} \ dx$$

で，右辺の第 1 項は $|f_1(x)| \leq 1$, 第 2 項は $|f_2(x)|^{p_n} \leq |f_2(x)|^{p'}$ という評価かできるので，いずれについても Lebsegue の収束定理が使えて，$\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p \ dx$ に収束します．

[7] (20 点) まず，形式的な変形は

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y) \ dy \right) e^{-ixt} \ dx &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt} \ dydx \\
&= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt} \ dxdy \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x-y)e^{-i(x-y)t} \ dx \int_{\mathbf{R}} g(y)e^{-iyt} \ dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ixt} \ dx \int_{\mathbf{R}} g(x)e^{-ixt} \ dx
\end{aligned}$$

です．このうち最後の等式は単に Lebesgue 積分が平行移動で不変だということを使っているだけなので，問題は積分順序を交換している 2 番目の等号です．これは Fubini の定理を使っているわけですが，使える理由は，$|f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt}| = |f(x-y)g(y)|$ に対し，

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)| \ dxdy = \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| \ dx \int_{\mathbf{R}} |g(y)| \ dx = \int_{\mathbf{R}} |f(x)| \ dx \int_{\mathbf{R}} |g(y)| \ dx < \infty$$

であるからです．

計算の部分は簡単なんですから，なぜ Fubini の定理が使えるのかということがきちんと説明されていなければ大幅な減点です．

講義の単位を落とした人には 12 月頃に追試があります．また，今回，または追試で講義の単位を取った人が演習の単位だけ落としている場合はあとでレポート提出を課す予定です．いずれも掲示に注意してください．