解析学 IV 小テスト No. 3 の簡単な解説

1997 年 5 月 12 日
河東泰之

[1] $B \subset \mathbf{R}$ に対し，$x \in A \cap B$, $y \in A \cap B^c$ とすれば，$\Gamma(\{x\}) = \Gamma(\{y\}) = \Gamma(\{x, y\}) = 1/2$ となるので，B は Γ-可測ではなくなります．つまり，B は Γ-可測であるためには，A を丸ごと含むか，まったく A と交わらないかのどちらかでないといけません．A^c についても同様なので，Γ-可測集合全体は，$\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^c, \mathbf{R}\}$ です．

[2] 空集合以外のすべての A について，$\Gamma(A) = \infty$ となるので，X のすべての部分集合が Γ-可測です．

[3] $A_n = A \cap ([1/n, n] \times \mathbf{R})$ とおくと，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから，各 n について $\mu^*(A_n) = 0$ を示せば，$\mu^*(A) = 0$ が示せたことになります．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，関数 $1/x$ が $[1/n, n]$ 上一様連続であることより，区間 $[1/n, n]$ を細かく分割することにより，高さ ε の有限個の長方形で A_n を覆うことができます．$\varepsilon > 0$ は任意に小さく取れるので，$\mu^*(A_n) = 0$ となります．以上より $\mu^*(A) = 0$ です．

[4] $A = (0, 1]$ とすると，m の定義より，$m(A) = 2$ です．一方，$A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ とすれば，$\Gamma(A) \leq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ となっているのでこの A が問題の例になっています．

配点は各問 25 点です．最高点は 100 点 (7 人)，平均点は 47.8 点でした．