解析学特別演習 I・レポート問題

1997 年 12 月 18 日
河東泰之

解析学特別演習 I の単位を落としている人のためのレポート問題です．解析学 IV の単位を (本試験または追試験で) 取っていることがレポート提出の資格です．それ以外の人は来年度また取ってください．

以下の問題をすべて解いて，1 月 14 日までに事務室に提出してください．

[1] $f(\xi)$ を $(0,\infty)$ 上の有界可測関数とする．$H=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\ z>0\}$ とおき，$z\in H$の時，$F(z)=\displaystyle\int_0^\infty f(\xi)e^{i\xi z}\,d\xi$とおく．この積分の値が複素数値で定まり，$F(z)$ が H上正則となることを示せ.（使う定理，その定理が使える根拠をはっきりと述べること.）

[2] $p\in(1,\infty)$ に対して，複素数列の空間 $\ell^p(\mathbf{Z})$ を，$\{(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}\mid \sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_n|^p<\infty\}$ と定義し，$a=(a_n)\in\ell^p(\mathbf{Z})$ に対し $\|a\|_p=(\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_n|^p)^{1/p}$ とおく．

$x=(x_n)\in\ell^1(\mathbf{Z})$ を固定し，$a=(a_n)\in\ell^2(\mathbf{Z})$ に対し，数列 $x*a$ を $(x*a)_n=\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_{n-k}a_k$と定める．次の 3 つを示せ.

(1) すべての $n\in\mathbf{Z}$ について，無限級数$\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_{n-k}a_k$ は絶対収束する.

(2) $x*a\in\ell^2(\mathbf{Z})$ である.

(3) $\|x*a\|_2\le\|x\|_1\|a\|_2$である.

[3] 次の 3 条件をすべて満たす，$[0,1]$ 上の実数値連続関数列 $\{f_n(x)\}_n$の例を一つあげよ.(きちんと説明をつけること．)

(1) すべての $x\in[0,1]$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)|\,dx=0$.

(3) すべての n について $|f_n(x)|\le g(x)$ a.e. となるような，$[0,1]$ 上の可積分関数 $g(x)$ は存在しない.

[4] $t>0$ に対し，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ を求めよ．計算の根拠をきちんと述べること.

[5] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測有界関数とし，$|f(x)|\le C$ a.e. となるような C の下限が 1 であるとする．$g(x)$ が，$\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可積分関数で$\displaystyle\int_{\mathbf{R}}|g(x)|\,dx\le 1$ となるもの全体を動くとき，$\left|\displaystyle\int_{\mathbf{R}}f(x)g(x)\,dx\right|$の上限が 1 であることを示せ.