1997 年度解析学 IV 追試

1997 年 12 月 16 日
河東泰之

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います.（本，プリント，人のノートのコピーなどは不可です.）時間は 3 時間です．この試験は持ち込み可なので，下の [1] に正しく答えることが単位を取るための必要条件です (が，もちろん十分条件ではありません).

[1] 次の各定理のステートメントを書け.
(1) Lebesgue の収束定理
(2) 単調収束定理 (Beppo Levi の定理とも言う)
(3) Fatou の lemma

[2] $[0,1]$ 上の実数値関数で，Riemann 積分可能ではないが，Lebesgue 測度について可積分であるような関数の例を 1 つあげよ．その関数がこの条件を満たしていることをきちんと説明すること.

[3] 次のおのおのの場合について，与えられた条件を満たす関数は存在するか．存在する場合は一つ例を挙げ，存在しない場合は存在しないことの証明を与えよ．(例を挙げるときはきちんと説明をつけること．)
(1) $[0,1]$ 上 Lebesgue 可測な実数値関数 $f(x)$ で，$f(x)^2$ は $[0,1]$ 上可積分だが，$f(x)$ は $[0,1]$ 上可積分ではないもの.
(2) $\mathbf{R}$ 上 Lebesgue 可測な実数値関数 $f(x)$ で，$f(x)^2$ は $\mathbf{R}$ 上可積分だが，$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上可積分ではないもの.
(3) $(0,1)$ 上連続な実数値関数 $f(x)$ で，$(0,1)$ 上 Lebesgue 測度について可積分だが有界ではないもの.
(4) $\mathbf{R}$ 上連続な実数値関数 $f(x)$ で，$\mathbf{R}$ 上 Lebesgue 可積分だが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ とはならないもの.
(5) $\mathbf{R}$ 上連続な実数値関数 $f(x)$ で，すべての自然数 $n \geq 1$ について $|f(x)|^n$ は $\mathbf{R}$ 上 Lebesgue 可積分となるが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ とはならないもの.

[4] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の正値 Lebesgue 可積分関数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f(x)^n\,dx$ が (有限確定値として) 存在するための必要十分条件を求めよ．さらにそのときの，この極限値を求めよ.

[5] $f(x)$ を，$\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可積分関数とする.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{f(x)}{1+x^{2n}}\,dx$$

を求めよ．計算の根拠もきちんと示すこと.

[6] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測有界関数とし，$|f(x)| \leq C$ a.e. となるような C の下限が 1 であるとする．$g(x)$ が，$\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可積分関数で $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |g(x)|\,dx \leq 1$ となるもの全体を動くとき，$\displaystyle\left|\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\,dx\right|$ の上限を求めよ.