解析学 IV 小テスト No. 12 の簡単な解説

1997 年 7 月 14 日
河東泰之

[1] 任意の実数 a に対し，$E = E(f(x) > a)$ とおきます．$F = E(f(x-y) > a)$ とすると，F は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}E \times \mathbf{R}$ を -45 度回転した集合になっています．$\dfrac{1}{\sqrt{2}}E \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ で明らかに Lebsegue 可測なので，一般に集合 A が $\mathbf{R}^2$ で Lebesgue 可測な時に，A を回転した集合も Lebesgue 可測であることを示せば十分です．

まず，A が測度 0 の場合を考えます．測度 0 と言うことは，辺が座標軸に平行な長方形可算個の和で覆うことができ，それらの長方形の面積の和をいくらでも小さくできると言うことです．長方形を回転しても測度が変わらないことはすぐにわかるので，このことより，A を回転しても Lebesuge 可測で，測度は 0 であることがわかります．

次に一般の A の場合を考えます．授業でやった定理より，可算個の閉集合 F_n, 可算個の開集合 U_n が，$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$ となるように取れます．開集合，閉集合は回転してもそれぞれ開集合，閉集合ですから，上にやった測度 0 の場合の話から，A を回転した集合についても上の A と同様の性質が成り立ちます．Lebesgue 測度の完備性より，これは A を回転したものが Lebesgue 可測であることを意味しています．

[2] $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合 A で，$\int_A f(x)\,dx \geq 0$ であるようなもの全体を $\mathcal{M}$ とします．これは区間の有限和を含む単調族だからすべての Borel 集合を含んでいます．次に $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合 A を任意に取ります．上と同様に可算個の閉集合 F_n, 可算個の開集合 U_n が，$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$ となるようにとれます．$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ は Borel 集合だから，$\mathcal{M}$ に属し，したがって A も $\mathcal{M}$ に属します．後は，$E_n = E(f(x) < -1/n)$ とすれば，$\mu(E_n) = 0$ がすぐにわかるので，$E = E(f(x) < 0)$ としたとき，$\mu(E) = 0$ です．

配点は [1], [2] 各 50 点です．最高点は 40 点 (2 人)，平均点は 11.3 点でした．