解析学 IV 小テスト No. 11 の簡単な解説

1997 年 7 月 14 日
河東泰之

[1] 今有限集合で考えているので，単調増大列，減少列は必ずある番号以降は同じ集合になってしまいます．だから，$\mathcal{F}$ 内の単調増大列，減少列の極限は $\mathcal{F}$ 自身の元になってしまいます．つまり，$\mathcal{F}$ 自身がすでに単調族でこれが答えです．

[2] (1) これは有名なもので，例えば留数計算でできます．忘れた人は複素関数論の本を見てください．

(2) 関数 $\dfrac{\sin(x^{2k})}{x^{2k+1}}$ を部分積分することによって，極限が 0 であることがわかります．

(3) 極限の式を次のように 3 つに分けます．

$$\int_{-1}^{1} \sin nx \frac{\sin(x^{2k}) - x^{2k}}{x^{2k+1}}\,dx + \int_{-1}^{1} (\sin nx) \frac{x^{2k}}{x^{2k+1}}\,dx + \int_{|x|>1} \sin nx \frac{\sin(x^{2k})}{x^{2k+1}}\,dx$$

第 3 項の limit は，(2) より 0 です．また，第 1 項は，関数 $\dfrac{\sin(x^{2k}) - x^{2k}}{x^{2k+1}}$ を，$[-1, 1]$ で考えることにより，(2) と同様に極限 0 を持つ事が分かります．第 2 項は置換積分で，$\displaystyle\int_{-n}^{n} \frac{\sin x}{x}\,dx$ となるので，(1) を使って，結局極限は π になります．

[3] いろいろな作り方がありますが，たとえば，集合列 A_n を，$[0, 1/2]$, $[1/2, 2/2]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 2/4]$, $[2/4, 3/4]$, $[3/4, 4/4]$, $[0, 1/8]$, $[1/8, 2/8]$, $[2/8, 3/8]$, $[3/8, 4/8]$, $[4/8, 5/8]$, $[5/8, 6/8]$, $[6/8, 7/8]$, $[7/8, 8/8]$, $\ldots$ として決め，$f_n(x) = \chi_{A_n}(x)$ とすれば大丈夫です．

最高点は 90 点 (2 人)，平均点は 29.5 点でした．