解析学 IV 小テスト No. 10 の簡単な解説

1997 年 6 月 30 日
河東泰之

[1] $f(x)$ が可積分だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x)|\,dx + \int_{b}^{\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon/3$$

となる $a, b$ が取れる．この $a, b$ に対し，

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \left[f(x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

であるから，$n > N$ ならば，$\left|\left[f(x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b\right| < \varepsilon/3,$

$$\left|\int_a^b f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right| \le \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\,dx < \varepsilon/3$$

となるような $N$ が取れる．これは， $n > N$ のとき $\left|\int_{\infty}^{\infty} f(x)\sin nx\,dx\right| < \varepsilon$ を意味しているから，求める極限は 0 である．

[2] $|f(x)| \le C$ となる $C$ を取れば，$F(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-t)\,dx$ と書けるから，

$$\begin{aligned} |F(t+h) - F(t)| &= \left|\int_{\mathbf{R}} f(x)(g(x-t-h) - g(x-t))\,dx\right| \\ &\le C\int_R |g(x-t-h) - g(x-t)|\,dx \end{aligned}$$

を使えば授業でやった定理より，$h \to 0$ のときに右辺 $\to 0$ になる．

[3] $t$ のかわりに $t + is$ を代入して，授業でやったように積分記号下の微分を行えば，Cauchy-Riemann 方程式を満たしていることがわかるので，複素平面での正則関数が得られる．それを実軸上に制限したものが $f(t)$ だから実解析的である．

配点は [1] 30, [2] 40, [3] 30 点です．最高点は 100 点 (2 人)，平均点は 26.2 点でした．

補講は 7 月 24 日 (木)10:00-12:00 に決めました．部屋はいつもと同じです．2 人 ×× の人がいてすみませんが，最後の補講の回の分は試験の範囲には入れません．

それから,「演習の問題が難しすぎる」という意見がいくつかあったのでそれに答えます.「演習」では，自分でじっくり考えてほしいのと，かなりよくできる人もい

るので，ある程度難しめの問題もわざと出しています．その場でちゃんとできればもちろんそれでけっこうですが，みんながそうできるはずだと思っているわけではないので，むしろあとで自分でゆっくり考えて見ることを期待しています．(普通に前で解く，という形式の演習であれば当然うちで考えてくるわけですからそれと同じことです．) そういうことも考慮して，演習の成績については去年は (悪いほうから 2 回分を除いた) 平均点が 20 点まで通しています．期末試験の難易度，成績評価についてはこれとは別にちゃんと考慮するつもりです．

それから，ホームページの過去の演習問題の TEXfile がうまく扱えない，という意見がありました．教育用計算機センターでやるときは，最初に \input amstex というのをつければいいんですが，ほかでもよくわからないという意見があったので，それに考慮して dvi file もおいてあります．