

解析学 IV 小テスト No. 1 の簡単な解説

1997 年 4 月 21 日

河東泰之

おことわり . [2], [3] でいう「正值」というのは, 0 を含むつもりで書きました . 私の専門ではこれが当然のしきたりで, この授業でもそういう使い方をしますが, そうは取らなかった人もあったようで, すみません . (さらに, 試験の直後にこのことを質問に来た人に, いいかげんに答えてしまいました .) $f(x) > 0$ の意味に思ってもできませんが, 少し作り方が難しくなります .

以下の解答は概略にとどめてあります . 実際の答案ではもっときちんと書かないといけません .

[1] $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ だから, 問題の積分が収束することと, $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^\alpha dx dy$ が収束することは同値です . こちらの積分は, $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{2\alpha} r dr d\theta$ に等しいので, 求める条件は, $2\alpha + 1 > -1$, つまり $\alpha > -1$ です .

[2] いろいろ作れますが, たとえば, $x = -\infty$ で $f(x) = 0$, $x = -n^2$ で $f(x) = 0$, $x = 0$ で $f(x) = 1/n$, $x = n^2$ で $f(x) = 0$, $x = \infty$ で $f(x) = 0$, というのを折れ線でつないだグラフを持つ関数を $f_n(x)$ とすれば O.K. です .

[3] (1) たとえば, $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ とすれば, O.K. です .

(2) グラフを記述します . $n \geq 2$ に対し, 点 $(n-1/n^3, 0)$, (n, n) , $(n+1/n^3, 0)$ を結び, あとは値が 0 になるようなグラフを考えます . これに対応する関数を取れば O.K. です . これが一番難しかったようです .

「正值」と書いてあるので, 問題文の積分の絶対値は不要でした .

配点は 1 番から順に, 30, 30, 20×2 点です . 最高点は 100 点 (3 人), 平均点は 53.9 点でした .