解析学 IV 小テスト No. 7

1997 年 6 月 2 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] 集合 X 上の完全加法族 $\mathcal{B}$ と測度 μ について考える．X 上の実数値関数 $f(x)$ が可積分であると仮定する．このとき，$E(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ となるような $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $\mathcal{B}$ 内に取れることを示せ.

[2] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可積分関数，E を $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合とする．$t \in \mathbf{R}$ について，$E + t = \{r + t \mid r \in E\}$ として，$g(t) = \int_{E_t} f(x)\, dx$ とおく．(ただしこの積分は Lebesgue 測度についての積分を表す．) このとき，$g(t)$ は $\mathbf{R}$ 上の連続関数であることを示せ.

[3] $f(x)$ を $[0, \infty)$ 上の Lebesgue 可測関数で，$f(x) \geq 0$ を満たすものとする．

$$\lim_{t \to \infty} \int_{[0,t]} f(x)\, dx = \int_{[0,\ \infty)} f(x)\, dx$$

であることを示せ．(ただしこの積分は Lebesgue 測度についての積分を表す．)

[4] $\mathbf{R}$ 上のすべての部分集合からなる完全加法族を $\mathcal{B}$ とし，$A \in \mathcal{B}$ について，

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & A \text{ が無限集合のとき,} \\ n, & A \text{ の元の数が } n \text{ のとき,} \end{cases}$$

と測度 μ を定める．$\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ で，$f(x) \geq 0$ を満たすものに対して，$f(x)$ がこの測度 μ について可積分になるための必要十分条件を求めよ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.