解析学 IV 小テスト No. 6

1997 年 5 月 26 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] $f(x)$ を X 上の複素数値可測関数で値 0 をとらないものとする．このとき $1/f(x)$ も可測関数であることを示せ.

[2] 集合 X 上の完全加法族 $\mathcal{B}$ と測度 μ を考える．$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を互いに交わらない X の部分集合，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ を実数とする．関数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$ が可測になるための必要十分条件を求めよ.

[3] $\mathbf{R}$ 上の実数値関数 $f(x), g(x)$ で，$f(x)$ も $g(x)$ も Lebesgue 可測でないが，$f(x)g(x)$ は Lebesgue 可測であるようなものの例を一組あげよ.

[4] $\mathbf{R}$ のすべての部分集合からなる完全加法族を $\mathcal{B}$，$A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \text{ のとき}, \\ 1, & 0 \in A \text{ のとき}. \end{cases}$$

として定まる測度を μ とする．$\mathbf{R}$ 上の正値関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\mu$ は何か．積分の定義に基づいて答えよ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.