

自分のノートを参照してよい (ただし, 本は見ないこと.)

[1] $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + 2y^2)^\alpha dx dy$ が収束するような実数 α の範囲を求めよ.

[2] 次の条件すべてを満たすような, \mathbf{R} 上の正值連続関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つあげよ (その列が本当に下記の条件を満たしていることをきちんと説明すること.)

(1) すべての n に対し, 広義積分 $\int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx$ が (有限実数として) 存在する.

(2) \mathbf{R} 上, 関数列 $\{f_n(x)\}_n$ は定数関数 0 に一様収束する.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = \infty$.

[3] (1) \mathbf{R} 上の正值連続関数 $f(x)$ で, $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$ だが, $\int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx = \infty$ となるものの例を一つ挙げよ.

(2) \mathbf{R} 上の正值連続関数 $f(x)$ で, $\int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty$ だが, $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx = \infty$ となるものの例を一つ挙げよ.

ただし, これらの積分は広義積分である. 以上 2 つのいずれも, その例が本当に条件を満たしていることをきちんと説明すること.

解答は別紙に書いて下さい. 解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.