1996 年度解析学 IV 期末テスト解説

1996 年 9 月 11 日
河東泰之

答案の得点の横に赤で書いてあるのが，この講義の成績，その横に青で書いてあるのが演習の成績です．配点は，1 番から順に，20, 20, 20, 25, 25, 20, 25 点で合計 155 点満点です．最高点は 119 点，平均点は 48.2 点，得点の分布は次のとおりです．

0–39 (点)	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90-99	100–109	110–
15（人）	7	1	4	5	4	2	1	2

成績と点数の対応は次のとおりです.（試験が欠席の人はこれに入っていません.）

$$
\begin{aligned}
75\text{ 点以上}A &\quad (12\text{ 人}),\\
60\text{ 点以上 }74\text{ 点以下}B &\quad (6\text{ 人}),\\
45\text{ 点以上 }59\text{ 点以下}C &\quad (6\text{ 人}),\\
44\text{ 点以下}D &\quad (17\text{ 人}).
\end{aligned}
$$

また，演習の成績が，7 月に付けた仮の成績からアップした人は 2 人だけです．それらの人には，青字の成績の横にプラスの記号がついています.

講義の単位を落とした人には追試があります．12 月頃の予定です．また，演習の単位を落とした人にはレポート提出を課す予定です．いずれも掲示に注意してください.

以下，各問に略解，解説を付けます．実際の答案ではもっと詳しく説明しないと減点になります.

[1] 各問−15 点〜5 点でつけました．マイナスというのは，他の問題ができているぶんから引く，ということです．つまり [2] から [7] で，50 点分できていても，この 4 つが白紙なら総点は−10 点です.

できなかった人はよく復習してください.

[2] これはほとんど授業でやりました．Beppo Levi または，Lebesgue の収束定理ですぐできます．ただ，$\Phi(E)$ が$\pm\infty$ でない有限な実数であることは，きちんと断って下さい．もちろん簡単なことですが，断っていない人は 2 点減点です.

[3] Fatou の lemma を使えば明らかです.（Lebesgue の収束定理を使うのではありません.）

[4] Lebesgue 測度が 0 なら，$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_{jk}) < 1/2^j$ となる開区間 I_{jk}が取れる．これらを全部あわせたものを取ればよい.

逆に (1), (2), (3) を満たす I_nがあれば，すべての kについて，$A \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} I_n$だから，$A$ の Lebesgue 測度は 0 になる.

[5] (1) 授業でやった $L^1(\mathbf{R})$ の時の証明をまねすればできる．

(2) まず，Cauchy-Schwarz より，$f*g$が定義できる．$t \in \mathbf{R}$ に対し，$f_t(x) = f(t-x)$ とおくと，(1) を使って $t \to s$ の時，$\|f_t - f_s\|_2 \to 0$ が示せる．これと，Cauchy-Schwarz で連続性が出る．

[6] (1) 無限和のように見えるが，実は x または yを固定すれば有限和なので簡単に計算できて，前者の積分は 0，後者は 1 となる．

(2) $f(x,y)$ は可積分でない.（答案ではちゃんと説明が必要です.）

[7] (1) νは，半開区間有限個の disjoint union 全体の上で有限加法的である．よって，4/30 の授業の定理より，半開区間有限個の disjoint union はすべてΓ-可測である．Γ-可測な集合全体は完全加法族だから，Borel 集合はすべてΓ-可測な集合の族に属する．

(2) [2] で示したように，νは，半開区間有限個の disjoint union 全体の上で完全加法的である．よって，Hopf の拡張定理より，νの Borel 集合全体への拡張は一意的である．一方，$\mathbf{R}$ 上の Borel 集合 A について$\int_A f(x)\,dx$ を対応させる写像は明らかにνの拡張なので，一意性より結論を得る．