数理科学 IV 期末テスト略解・解説

2005 年 7 月 28 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 10×2, 20, 20, 25, 25 点の計 110 点満点です．この点数 x_2 が上に赤で書いてあります．第 2 回中間テストの点数を x_1 とすると，最終成績 x は前に予告したとおり，$x = 0.3\max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ (を四捨五入したもの) として計算します．(ただし x_1, x_2 ともに，100 点を超えていたら 100 点で頭打ちです．) これが青で書いてある点数で，教務課に報告されるものです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

期末テスト自体の最高点は 110 点 (1 人)，平均点は 63.7 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
16 (人)	8	6	6	6	4	6

最終成績 (青い数字) の平均点は 66.6 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
12 (人)	9	7	7	7	4	6

これによって，A, B, C, D の人数はそれぞれ，17, 12, 11, 12 人となります．

[1] (1) Jordan 標準形は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

最小多項式は $(x-1)(x-2)$.

(2) Jordan 標準形は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

最小多項式は $(x-1)^2(x-2)$.

[2] 答えはいくつもありますが，たとえば

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

また Jordan 標準形は（問題では聞いていませんが）

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

となります.

[3] A の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

です．あとは普通に計算して,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} (6t+1)e^{2t} & -4te^{2t} \\ 9te^{2t} & (-6t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

となります.

[4] A の Jordan 標準形としてありうるのは,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

のいずれかです．ただし α, β は実数で，前者の行列では，$\alpha \neq \beta$ です．これより，$\exp A$ の Jordan 標準形は下記の二つの行列の Jordan 標準形に等しくなります.

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\alpha} & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}$$

前者においては，α, β が実数であることより $e^{\alpha} \neq e^{\beta}$, また後者においては $e^{\alpha} \neq 0$ であることより，上のの二つの行列の Jordan 標準形はそれぞれ下記のようになります.

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

このことより，$\exp A$ の最小多項式の次数は 2 となります.

[5] A の固有値は $1, t, t+1$ です．$t=0$ の場合，A の最小多項式は $x(x-1)$ です．また，$t=1$ の場合，A の最小多項式は $(x-1)^2(x-2)$ です．それ以外の場合は，固有値が互いに相異なるので，A の最小多項式は 3 次多項式となります．このことより，$t=0$ で V は 2 次元，その他の場合は 3 次元となります.