

数理科学 IV 中間テスト (2) 略解・解説

2005 年 7 月 11 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

120 点満点です。平均点は 72.6 点，最高点は 120 点 (1 人) でした。

[1] 10 点 × 3 です。標準的方法でできるので，答えだ書いておきます。

(1) Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で，最小多項式は $(x - 1)^2$ です。

(2) Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で，最小多項式は $(x - 2)(x + 1)^2$ です。

(3) Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で，最小多項式は $(x - 1)^3$ です。

[2] 30 点です。これも普通の方法でできます。答えは一つではありませんが，たとえば，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

です。また (問題では聞いていませんが) Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となります。

[3] 30 点です。まず固有多項式は t にかかわらず， $(x - 2)^2(x + 1)$ となっています。したがって最小多項式が 2 次式になるとすればそれは $(x + 1)(x - 2)$ しかありません。これになるようにすると， $t = 3$ がわかります。

[4] 30 点です。まず $A(x)$ の標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x - 1 & 0 \\ 0 & 0 & x(x - 1) \end{pmatrix}$$

となります．

$B(x)$ の標準形がこれになるためには，すべての 2×2 行列式の最大公約多項式が $x - 1$ である必要があります．右上の 2×2 部分に注目して，この行列式が $x - 1$ で割れるために $p(1) = 1$ が必要です．また行列式が $cx(x - 1)^2$ (c は 0 でない定数) の形でなくてはいけないので， $p(x)$ は 2 次式以上にはなれません．あとは実際に行列式を計算すれば， $p(x) = ax + (1 - a)$, $a \neq 1$ が必要で，これで十分であることもわかります．