作用環論専門家のための 3 次元トポロジー入門

河東泰之 (東大・数理)

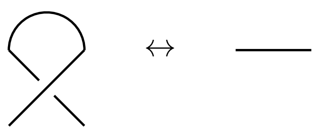
1　初めに

1984 年の Jones による，結び目の不変量 Jones 多項式の発見 [2] 以来，作用素環論と 3 次元トポロジーの関係が深まっている．しかし，通常の解析寄りの大学（院）教育を受けた場合，この種の理論に関連した 3 次元トポロジーは習わないのが普通である．一方，ここに現れる 3 次元トポロジーの理論は，証明を無視すれば，ステートメントを述べたり内容を理解したりするのは極端にやさしく，ほとんど何の予備知識も必要としない.（中学生でも解ると言っていよいであろう.）そこでこの講演の目的は，この種のトポロジーのやさしい説明を行い，作用素環側で何をすればさまざまな位相不変量を作れたことになるのかを解説することである.「作用環論専門家のための」という，まくらことばは,「トポロジーの専門家でない人のための」という意味である．

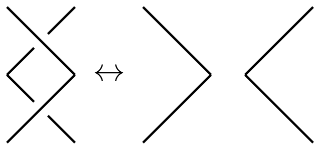
2　Jones 多項式—Kauffman 方式—

ここで考える対象は，3 次元空間における結び目，つまりひもがからまったようなもの（に常識的な同値関係を入れたもの）を分類することである．連結なものを knot，連結成分がもっとある（かもしれない）ものを link と呼ぶが，両方合わせて knot と言ってしまうことも多い．

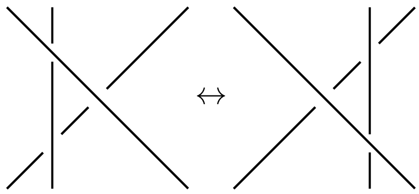
Jones 多項式とは，knot に対し，($\sqrt{t}$の Laurent) 多項式をその不変量として対応させる仕組みである．これは非常に有名なものであるが，まず基礎として一通り解説する．ここでのやり方では，knot を平面上の絵として表示することが基本である．すると，同じ knot が違う絵で表されることが当然起こる．これがどのような場合に起こるかは，昔から Reidemeister の定理として知られている．これは，同じ knot の絵は次の図のような 3 種類の Reidemeister move と呼ばれる図形の変形法の組み合わせで移りあえる，というものである．



Type I の Reidemeister move



Type II の Reidemeister move

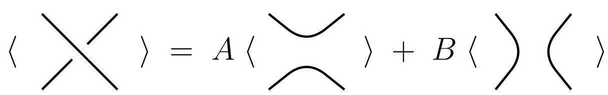


Type III の Reidemeister move

そこで，平面上の knot の絵に多項式を対応させる規則を決め，その対応がこの 3 種類の Reidemeister move で不変ならばよい，と考える．これが Kauffman [3] が，Jones 多項式の発見後に気付いたことで，もとの Jones のやり方より簡単にできる．Knot Kに対し，A, B, d の 3 変数の多項式 $\langle K\rangle$ を次の規則で対応させ，これを Kの Kauffman bracket と呼ぶ．

1. 結ばれていない knot (“unknot”) については対応する Kauffman bracket は 1.
2. Link Kが unknot とそれに絡まらない K'からなるとき，$\langle K\rangle = d\langle K'\rangle$.

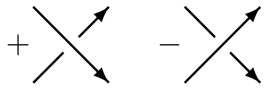
また，次の規則を要求する．



これは，knot の一部だけを取り出したて書いているのである．つまりある knot の一つの交点に注目し，そこの交差を右辺のように二通りにはずした knot を考え，これら 3 つの knot の Kauffman bracket の関係式を書いたものである．

上の関係式を要求した上で，Kauffman bracket が type II の Reidemeister move で不変になるようにしてみよう．すると簡単な計算で，$B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$とおけばよいことがわかる．さらに，type II の Reidemeister move での不変性と上の関係式からから type III の Reidemeister move での不変性も従うことが簡単にわかる．

あとは type I である．Type I の Reidemiseter move で単に左側の絵を変形すると右側の絵の Kauffman bracket に$-A^3$がかかったものになることがわかる．そこで次のような細工を考える．Knot には向きをつけることにして，この向きから各交差点に次の図のような符号をつける．



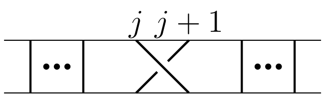
こうして得られる各交差点の符号を足しあわせたものを knot Kの writhe と言い，$w(K)$ で表す．そして，Kに対する A の Laurent 多項式 $F_K(A)$ を $(-A)^{-3w(K)}\langle K\rangle$ で定めると，これは type I から III のすべての Reidemeister move で不変となり，knot Kの不変量を定めることがわかる．この多項式は，本質的に Jones 多項式と同じものである．もとの Jones 多項式は，$V_K(t) = F_K(t^{-1/4})$ で与えられる．

講演では，トレフォイルの Jones 多項式の計算を示したが，それは$-A^{-16}+A^{-12}+A^{-4}$になる．ただしここで，トレフォイルは互いに鏡像で移りあえるものが二つある．これはそのうちの片方に対応するものである．もう片方を取れば，A の指数の符号がいっせいに交代する．このように，knot とその鏡像が区別できる（ことがある）のが Jones 多項式の大きな特徴で古典的な Alexander 多項式などとの違いである．

3　Jones 多項式—元祖 Jones 式—

さて上のように，Jones 多項式の定義はできたが，この方法はあまり，作用素環と近いように見えない．そこで,（少しは）作用素環に近い方法としてもともとの Jones の方法 [2] を説明しよう．

今度は，knot は braid というものの closure として表す．直感的には，braid とは n 本のひもが上から下にからまって降りてきているものである.（降りかけた途中でひもが上に上がったりはしない.）n 本からなる braid は,「上下につなぐ」という操作によって群をなす．これを braid 群 B_nと呼ぶ．この群の生成元は，次の図で決まる$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$である．

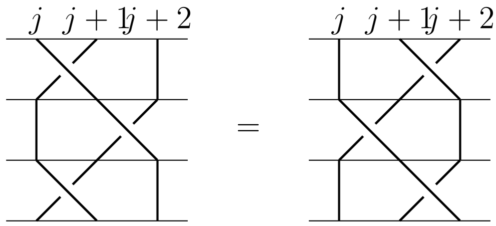


The generator σ_j

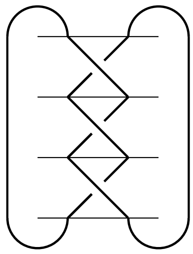
生成元の間に次の関係式が成り立つことはすぐにわかる．

1. $\sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j$, if $|j-k| \geq 2$.
2. $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$.

この 2 番目のものは，次のように図で表される．



さて braid に対し，その closure とは，上下の対応する “ひも” をつないで得られる knot である．(実際はできるものは連結とは限らないので，link と言った方が正確だが，簡単のため knot と言っている．）Closure の例は次のとおりである．



Braid σ_1^3の closure

これによって，braid から knot が得られるわけだが，今度も同じ knot を違う braid の closure として表す表し方がある．それは今度は次の 2 種類の Markov move というものの繰返しで移りあえることが Markov によって知られている．

1. $b, c \in B_n$に対し，$b \leftrightarrow cbc^{-1}$.
2. $b \in B_n \subset B_{n+1}$に対し，$b \leftrightarrow b\sigma_n^{\pm 1}$.

ただしここで，B_nの元は，$n+1$ 本のひものうち，一番右側を動かさないものとして，B_{n+1}に埋めこまれている．これら 2 つの変形によって得られる braid が closure を取れば同じ knot を生じることは絵を描けば明らかであるが，Markov の定理はその逆を主張しているのである．そこで，braid に多項式を対応させる規則を作り，それが Markov move で不変であれば knot の不変量が得られたことになる．そのためにまず braid 群$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$の（無限次元）表現を作り，そこで trace と呼ばれるもの（線型代数の trace の類似物）を使うのである．

まず，Jones は彼の作用素環論の研究から次の 3 性質を満たす projection の列 $\{e_j\}_{1,2,\ldots}$を構成した．

1. $e_j = e_j^* = e_j^2$,
2. $e_j e_k = e_k e_j$, if $|j-k| \geq 2$,

3. $e_j e_{j\pm1} e_j = \tau e_j$,

ここで，$\tau = (4\cos^2\pi/m)^{-1}$かまたは，$\tau \leq 1/4$ である．さらに彼は e_jたちで生成される作用素環上に次の性質を満たす trace tr が存在することも同時に示した．

1. x, yが e_jたちで生成される作用素環に入るとき，$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$.

2. x が $e_1, e_2, \ldots, e_n$で生成される作用素環に入るとき，$\mathrm{tr}(xe_{n+1}) = \tau\mathrm{tr}(x)$.

今，$\tau^{-1} = 4\cos^2\pi/m$ とし，$\sqrt{t} = \exp(\pi i/m)$ とおこう．$(4\cos^2\pi/m)^{-1} = t(1+t)^{-2}$ である．ここで $g_j = \sqrt{t}(te_j - (1-e_j))$ とおけば，

1. $|j-k| \geq 2$ の時，$g_j g_k = g_k g_j$.

2. $g_j g_{j+1} g_j = g_{j+1} g_j g_{j+1}$.

が成り立つので，$\pi_m : \sigma_j \mapsto g_j$が，braid 群$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$の表現を与える．そこで，knot K が，ある braid $b \in B_n$の closure として表せているとしよう．この時，

$$V_K(t) = \left(-\frac{1+t}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} \mathrm{tr}(\pi_m(b))$$

とおく．m ごとにこの右辺は数を表し，上の Markov の定理から，この数は knot の不変量を表すが，実は m を動かしたときこの右辺は$\sqrt{t}$の Laurent 多項式になることが簡単にわかるのである．これが上のセクションで導入した Jones 多項式と同じものになるのである．例えば，トレフォイルはσ_1^3の closure と思えるので，その Jones 多項式は

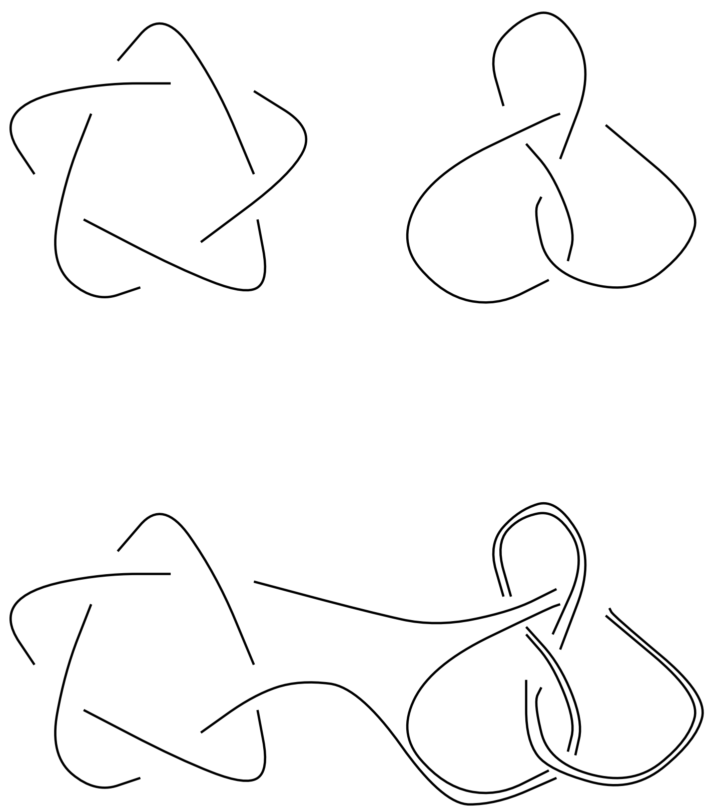
$$\begin{aligned}
& -\frac{1+t}{\sqrt{t}}\mathrm{tr}(g_1^3) \\
= \;& -\frac{1+t}{\sqrt{t}}\mathrm{tr}(\sqrt{t}^3(te_1 - (1-e_1))^3) \\
= \;& -t(1+t)\mathrm{tr}((-1+(1+t)e_1)^3) \\
= \;& -t(1+t)\mathrm{tr}(t^3 e_1 + e_1 - 1) \\
= \;& -t(1+t)\left((t^3+1)\frac{t}{(t+1)^2} - 1\right) \\
= \;& -t^2(t^2-t+1) + t + t^2 \\
= \;& -t^4 + t^3 + t
\end{aligned}$$

と計算される．

4 Surgery による，3 次元多様体の topological invariant

今度は，3 次元多様体に対する複素数値の不変量を考える．また，3 次元多様体を何らかの方法で具体的に表示するのだが，それに knot を使う．すなわち任意の closed

3 次元多様体は knot から surgery と呼ばれる方法で作れるのである．今度もまた，違う knot から同じ多様体が生じることがあるのだが，そのときの knot は互いに Kirby move というもので移りあえることがわかっている．これには 2 種類の move があるが，本質的なのは，次の handle slide と言われる操作である．それは，次の図の上から下への変形のように，ひとつの連結成分を他の連結成分にそってぐるっと動かすものである．



もう一つの move は blow up/down と言われるもので，今の設定ではそれは normalization の定数に関係するだけなので，省略する．そこで，今度も Kirby move で不変なような knot の（複素数値）不変量を見つければよい．そのため Jones 多項式の変数に 1 のべき根 $e^{2\pi i/k}$ を代入して得られる複素数値の不変量を考え，次のように cabling と呼ばれる方法を実行する．

まず与えられた link に対し，そのすべての連結成分を n 重にしてから，上の複素数値不変量を取る．この n 重にする操作が cabling である．これはもちろんもとの link の複素数値不変量である．この不変量は実はある意味で「既約」な不変量の和に分解することが示される．そして，n をどんどん増やして行ってもこのような「既約」な不変量の種類に限りがあることもわかる．実際にはこの数は 1 のべき根を $e^{2\pi i/k}$ に固定したとき，$k-1$ である．これらの不変量に，$0, 1, \ldots, k-2$ という番号を付け

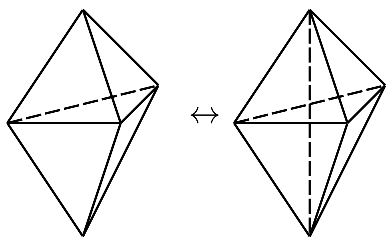
る．さらに，この cabling は，連結成分ごとにちがう n を使うことができるので，結局，連結成分ごとに $0, 1, \ldots, k-2$ という番号を付けたときに，複素数値の不変量が得られることになる．連結成分ごとにつける番号を color と呼び，各連結成分ごとに color をつけたものを colored link と呼んでいる．

さて次に link が任意に与えられたとする．最初に 1 のべき根を上述のように固定しておけば，有限個の color があり，これに応じて colored link の invariant が定まっているわけである．この時，すべての color づけに対し，この colored link の invariant を作り，適当な重みをつけてそれらの和を取ることを考える．すると，この和が handle slide で不変であることがわかり，多様体の複素数値不変量が得られるのである．これが，Reshetikhin-Turaev [4] による方法であり，同時期に Witten が物理的に考えていたことを数学的に厳密な形で実現するからくりになっている．これは，今 Jones 多項式から作ったが，さまざまな形（たとえば量子群から来る場合）に一般化されている．（Jones 多項式の場合は，量子群 $U_q(sl_2)$ に対応している．）

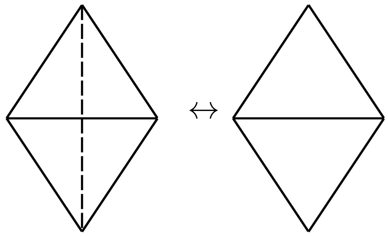
5　Triangulation による，3 次元多様体の topological invariant

今度は違う方法で topological invariant を作る．見掛け上，上のものと全然違うように見えるかもしれないが，実は密接に関係していることがわかっている．また，こちらの方法の方が作用素環と相性がよい．今度は，closed 3 次元多様体を triangulation に基づいて作る．3 次元の triangulation だからつまり，4 面体が有限個貼りあわされて多様体ができていると思う．またしても，同じ多様体が違う貼りあわせでできることがあるが，そのときの貼りあわせ方は，Alexander move というもので移りあえることがわかっている．古典的な Alexander move は無限種類あるので，実際はさらに簡単化して 3 つにしたもの（Pachner move）を使う．この 3 つは次のとおりである．

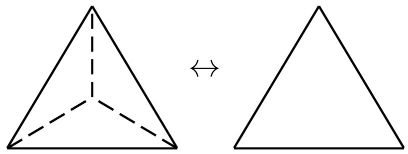
まず第 1 の move では，3 角形を共有する 2 つの 4 面体を考える．これを，次の図のように 3 つの 4 面体に分解するのである．（3 つのうちのどの 2 つも，1 つの 3 角形を共有していることに注意する．）



次に第 2 の move では，2 つの 4 面体が 2 つの 3 角形を共有している状況を考える．（普通の意味の 4 面体 2 つではこんなことはできないが，今 topological な話をしているので，ぐにゃっと曲げればこのようなことが実現できる．）これをつぶして 2 つの 3 角形（厚み，体積 0）にするのがこの move である．



最後の第 3 の move では，3 つの 3 角形を共有する 2 つの 4 面体を考える．(今度のはさらにぐにゃっと曲がっている．）これをつぶして 3 角形 1 つ（厚み，体積 0）にするのである．



今度も，作戦は 4 面体の有限個の貼りあわせに対し複素数を割り当てて，その規則が Alexander move で不変になるようにすることである．それには，各 4 面体の辺に，ある有限個の数（上でやった “color”）を割り振り，それに応じて各 4 面体（“colored tetrahedron”）に複素数を対応させ，さらにその数をすべての 4 面体についてかけて，最後にすべての color づけについて和を取る，ということをする．(より正確には，normalization のために重みが必要である．これには，“color” の “重み”—量子群の理論の量子次元に対応する—を使う．）この各 4 面体に数を対応させる規則がある種の条件を満たしていれば，この最後に出てくる数が，上の 3 つの move で不変となり，位相不変量になるのである．この，colored tetrehedron に数を対応させる規則を quantum $6j$-symbol という．これは表現論で昔からある，$6j$-symbol を “量子化” したものである．量子群の理論では，1 のべき根における量子群を一つ固定するごとに，“color” の有限集合が定まり，quantum $6j$-symbol が一つ定まり，これによって，topological invariant が一つ定まる．今，“color” の集合は有限になって欲しいのだが，古典的な表現論の $6j$-symbol でこれが有限集合になるのは有限群の表現を考えたときだけである．その時は，表現論でも，topology でもたいしておもしろいことはないのだが，1 のべき根における量子群を考えることにより，おもしろい，“color” の有限集合ができるのである．この quantum $6j$-symbol が確かに Alexander move で不変な量を与えるが，その証明に必要な，quantum $6j$-symbol の性質は，unitarity, tetrahedral symmetry, pentagon identity の 3 つである．そこで，より抽象的に，この 3 つの公理を満たすものを一般的な quantum $6j$-symbol と呼ぶことができるが，これが本質的に，subfactor から生じる paragroup と呼ばれる「群もどき」と同じものになるのである．これが Ocneanu による，1990–91 年の発見である．(「本質的には」とつけたのは，少し微妙な違いをごまかしているからである．この微妙な違いがいろいろな不思議な現象を引き起こすこともあるので，おもしろいのだがそれは省略する．)

この方法は Turaev-Viro [5] によるもので，やはり様々な一般化がなされている．さらに，$q = \exp(2\pi/k)$ の時，上の Reshetikhin-Turaev の不変量の絶対値の 2 乗が，この Turaev-Viro の不変量になるということが Turaev らによって示されている．これだ

け見ると，Reshetikhin-Turaev の不変量の不変量の方が本質的なもので，Turaev-Viro の不変量の方は情報が落ちていてよくないように見えるし，実際 topology の人はそう思っているようだが，作用素環論の立場から言うと，Turaev-Viro の不変量の方が本質的である．その理由は，Reshetikhin-Turaev の不変量の方は，勝手な subfactor からではうまく作れず，より都合のいい条件（Yang-Baxter 方程式と言ってもよい）が必要だが，Turaev-Viro の不変量の方は，そのような強い仮定無しにまったく一般的に定義できるからである．この事が，作用素環的におもしろいさまざまな現象を引き起こすのである．

6 Topological quantum field theory

上では，単に closed な多様体に対して数を対応させたが，もっと一般に境界がある場合も扱える．そのような場合を，$(2+1)$-次元の topological quantum field theory，略して TQFT というが，その定義を述べる．

まず，2 次元の surface（境界無し compact 多様体）Sに対し，有限次元の Hilbert 空間 H_Sを対応させる規則があるとする．そして，Pを compact な 3 次元多様体，∂P をその境界とする．$i_\pm : S_\pm \to \partial P$を $S_\pm$の embedding で，$\partial P = i_+(S_+) \cup i_-(S_-)$ かつ $i_+(S_+) \cap i_-(S_-) = \emptyset$ となるものとしよう．この時 $W = (P, i_+, i_-)$ を，$S_\pm$の間の cobordism というが，ここで線型写像$\Psi_W : H_{S_+} \to H_{S_-}$ が定まり，次の条件を満たすことを要請する．

1. $H_\emptyset = \mathbf{C}$.
2. $\Psi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}$ on H_S.
3. $\Psi_{W_2 \cdot W_1} = \Psi_{W_2} \cdot \Psi_{W_1}$.

ただしここで，id_Sとは，trivial cobordism $\mathrm{id}_S = (S \times [0,1], S \times \{0\}, S \times \{1\})$ を表し，また，$W_1 = (P_1, i_1 : S_1 \to \partial P_1, i_2 : S_2 \to \partial P_1)$ と $W_2 = (P_2, i_2 : S_2 \to \partial P_2, i_3 : S_3 \to \partial P_2)$ の “積” $W_2 \cdot W_1 = (P_1 \cup P_2, i_1, i_3)$ は，P_1と P_2を，S_2に沿って貼りあわせることで作られる．このような規則があるということが，TQFT の定義である．Pが compact 境界無しの多様体の時は，$H_\emptyset = \mathbf{C}$ より，Wは $\mathbf{C}$ の元を定めることに注意する．つまり，compact 境界無しの多様体に対して，複素数値の不変量が定まる．

これは Atiyah の公理化であり，Witten は，もともと物理的にその実現について考えた．Reshetikhin-Turaev, Tiraev-Viro の 2 つの方法は，いずれも topological quantum field theory の構成に一般化でき，さらに作用素環との関係がつくのである．くわしくは，本 [1] の 12 章に書いてある．

References

[1] Evans, D. E. and Kawahigashi, Y. (toappear). Quantum symmetries on operator algebras. (book manuscript).

[2] Jones, V. F. R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **12**,103–112.

[3] Kauffman, L. (1987). State models and the Jones polynomial. Topology **26**, 395–407.

[4] Reshetikhin, N. Yu. and Turaev, V. G. (1991). Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. Invent. Math. **103**, 547–598.

[5] Turaev, V. G. and Viro, O. Y. (1992). State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. Topology **31**, 865–902.