作用素環と3次元 topological quantum field theory

河東泰之 (東大・数理)

1 概説

V. F. R. Jones は，自ら創始した subfactor の理論に基づき，1984 年に結び目の不変量，Jones 多項式を発見した．これが，量子群，共形場理論，可解格子模型，低次元トポロジーなどを巻き込んで最近の数学を大きく前進させる原動力の一つとなったことはよく知られている．これらの諸分野と作用素環論の関係は，代数的，組合せ論的側面が主体となっているが，作用素環論側から見た場合は，その種の構造を支配する理論は，1987 年に A. Ocneanu によって始められた paragroup 理論 [10] である．Ocneanu は，この理論について証明を含む論文をまったく書いていないが，講演記録 [11], [13] や非公式ノート [12] が存在し，様々な努力 [2], [4], [6] などにより，その詳細が明らかになって来ている．ここでは，特に 3 次元 topological quantum field theory (TQFT) との関係に重点をおいて説明し，さらに Evans-Kawahigashi の orbifold construction [1] との関係について述べる．

まず，paragroup 理論の概略について述べる．より詳しくは，解説 [8] を見ていただきたい.（諸分野との関連については，[3] も詳しい.）まず，II_1型 factor と言われる無限次元の単純な作用素環のペア $N \subset M$ を考える．この inclusion の “サイズの比” を測るのが Jones index $[M : N] \in [1, \infty]$ である．以下，Mを固定して Nを動かすと考え，$N \subset M$ を単に subfactor という．一般には，$[M : N]$ は簡単に無限大になってしまうが，ここでは有限の場合だけを考える.（Jones index$= \infty$ の場

合の subfactor 理論は，ほとんど未開拓である.）Ocneanu の基本的アイディアは，2 つの II_1 factor が，一つの Hilbert 空間に両側から作用する bimodule を考えれば（compact 群の）表現論でのさまざまな操作がうまくマネできる，ということであった.（表現論の類似の議論を実行するためには，bimodule を考えるのがいいというアイディア自体は，Connes による.）具体的には，大きい環 Mを左右からのそれぞれ M, N による掛け算で bimodule と思ったものを，fundamental representaion の類似と思うのである.（正確には，Mを Hilbert 空間にするため，内積を入れて完備化する.）そこで，以下のような対比が現われる.

表現	bimodule
直和	直和
tensor 積	相対 tensor 積
次元	(Jones index)$^{1/2}$
Frobenius 相互律	Frobenius 相互律
基本表現	${}_M M_N$

次に，${}_M M_N$と${}_N M_M$ を元に，次々，相対 tensor 積を作り，その既約分解を行う．そうして現われるすべての bimodule を調べるのである.（Bimodule X, Y の相対 tensor 積 $X \otimes Y$を作るには，Xに右から作用している factor と Yに左から作用している factor が同じである必要がある．今，factor は，N, Mの二つを考えているので，bimodule は，N-N, N-M, M-N, M-Mの 4 種がある.）一般には，このようにしていけば，どんどん新しい bimodule ができていくが，ある都合のいい状況下では，有限個の bimodule だけで尽きてしまう．この時，もとの subfactor $N \subset M$は，finite depth を持つといい,（4 種の）有限個の bimodule から生成される “表現環もどき” が得られる.（すなわち，2 つの元の相対 tensor 積は，他の元の非負整数係数の有限 1 次結合に分解される.）これは，rational conformal field theory (RCFT) の言葉を流用して fusion algebra と呼ばれる.（ただし，我々の相対 tensor 積は，可換ではないことに注意しておく.）これは，有限 level での Wess-Zumino-Witten model や，1 の巾根での量子群の表現論によく似た状況である．Mが，AFD (approximately finite dimensional) II_1 factor と呼ばれる基本的

な作用素環で，subfactor $N \subset M$ が finite depth を持つ場合（さらには，もっと一般に strongly amenable と言われる場合）には，解析的にきわめていい性質を持つことが，S. Popa によって示されているので，subfactor の分類，構成の問題は，代数的問題に帰着されるのである．

既約 bimodule は，既約表現の類似なので，そのマネをすることにより，$6j$-symbol の類似が得られる．これは，quantum $6j$-symbol などと言われる．これは抽象的には，ある種の関係式を満たす有限個の複素数の組である．Fusion algebra と quantum $6j$-symbol の組で，ある公理系を満たすもの，というのが paragroup の一つの formulation である.（詳しくは，[12], [2] を見よ.）これは，Moore-Seiberg の combinatorial な意味での RCFT によく似ており，実際 de Boer-Goeree は，RCFT から paragroup が作れることを示している．$SU(2)_k$ WZW-model の場合が，Jones の A_n型 subfactor，$SU(N)_k$ WZW-model の場合が，Wenzl の Hecke algebra subfactor である．Paragroup のもともとの formulaton [10] は，quantum $6j$-symbol の 6 つの bimodule のうちの 2 つと固定して，残りの 4 つを動かした一部のデータだけを使う代わりに，flatness と言われる強いタイプの公理を仮定するものである．これは，可解格子模型における face model や，そこで partition function を考えることによく似ている．また，微分幾何学の離散的な類似とも思えるので，$6j$-symbol のかわりに flat connection という名前がついている.（Flatness の意味，可解格子模型との関係については，[11], [12], [6], [1], [3] を見よ.）Dynkin 図形に対応する場合など，具体的に計算する場合には，こちらの formulation のほうが都合がいいことが多い．

E. Witten は，Jones 多項式を物理的アイディアに基づいて考え，有名な 3 次元 TQFT の formulation を得た．これは数学的には，厳密でなかったので，厳密なものを与える試みが多くの人によって行われた．それらは，しばしば combinatorial な方法に基づき，我々の立場に特に関係するのは，Reshetikhin-Turaev によるものと，Turaev-Viro によるものである．前者は，link の surgery とその Kirby calculus に基づき，後者は，多様体の triangulation とその Alexander move に基づく．$SU(2)_k$などの場合には，後者の TQFT は，前者の TQFT とその複素共役との tensor 積に分解することが，Turaev によって証明されている．Turaev-Viro のものは，抽象的な公理を満たすある種の $6j$-symbol か

ら出発すればいつでも作れるという設定になっており，そのような一般化された $6j$-symbol の例として，Kirillov-Reshetikhin の $U_q(sl_2)$ の quantum $6j$-symbol があげられている．実は，我々の subfactor の意味での quantum $6j$-symbol の 3 つの公理は，この TQFT のための 3 つの公理と本質的に同じなので，finite depth の subfactor からは，いつでも 3 次元 TQFT が作れ，また，$6j$-symbol に基づく 3 次元 TQFT からは，いつでも subfactor に戻れることになる．(これは，最初 [12] で主張された．正確なステートメントと証明は，[2] を見よ．) Subfactor では，(直接には) 群や量子群から来ないものがいくつか構成されて居るので，それらに対応する TQFT のトポロジー的な意味の解明が興味深い．Reshetikhin-Turaev 型の TQFT は，"より高い対称性" が必要なので，勝手な subfactor からは作れない．この点については，次節でさらに説明する．

2　作用素環と TQFT — 類似点と相違点 —

上述の triangulation/$6j$-symbol に基づく 3 次元 TQFT にと para-group の関係についてさらに詳しく説明する．Kirillov-Reshetikhin の $6j$-symbol に基づく，Turaev-Viro の TQFT の場合は，1 の巾根を $\exp(\pi i/(n+1))$ の形に取れば，そのまま A_n型の Jones の subfactor ができる．その意味で，両者は，本質的には同じといってもいいのだが，やはり多少の違いがある．そしてこの違いがいろいろと興味深い現象をもたらすのである．

まず，第一は unitarity と言われる問題である．上で，1 の巾根を $\exp(\pi i/(n+1))$ の形に取ったが，これをほかの形に取ってしまうと，作用素環には対応しなくなってしまう．それは，作用素環では，Hilbert 空間の内積が postive definite でなくてはいけない，という条件に由来する．また，trace の positivity と言ってもよい．しかしとりあえず，これはそれほど興味深い違いをもたらさない．

より重要なポイントは，subfactor の状況では，両側から作用する factor それぞれについて $\mathbf{Z}_2$-grading があるということである．これによって 4 種の bimodule が発生するのだが，実は TQFT のためには，

M-M bimodule 1 種類，または N-N bimodule 1 種類だけ使えばよいのである.（どちらを使っても同じ TQFT ができる．[2] 参照.）一般に，4 種類の bimodule を全部知っていればもとの subfactor が復元できるが，1 種類だけからでは復元できない．このため，index が違う subfactor が同じ TQFT を与えることがありうる．その興味深い例が，[9] で与えられた，index が $4\cos^2(\pi/12)$ の A_{11}型の Jones subfactor と，index が $3+\sqrt{3}$の Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の関係である．後者は，Wess-Zumino-Witten model から直接には来ない subfactor としてもっとも有名な subfactor の一つであったが，出てくる TQFT は，$SU(2)_{10}$（の integer spin だけ使ったもの）と同じになってしまうのである．また，さらにこれを進めると，この index $3+\sqrt{3}$の subfactor が，作用素環論的に特別な性質を持っていることもわかる．それは，この subfactor は，principal graph と dual principal graph が同じだが，M-M bimodule の fusion rule と，N-N bimodule の fusion rule が異なる，ということである．片方の fusion rule は，上述のように A_{11}の integer spin の部分の fusion rule （truncated Clebsch-Gordan 係数で決まるもの）と同じであるが，もう片方は，index が $4\cos^2(\pi/12)$ の E_6型の subfactor の fusion rule と同じなのである．作用素環論的にもっときちんと言えば，E_6型 TQFT は，A_{11}型 TQFT の部分データだけを使って作られている，ということでもある．ただし，部分的なデータだけを使ったためにかえってよいものになる，という可能性もありうる．実際，Ocneanu の学生の Niţică と Török の計算によれば E_6型 TQFT は，lens space $L(3,1)$ の orientation を detect するということであるが，A_{11}型 TQFT は，いかなる多様体の orientation も detect できないことがすぐにわかる．

次節の quantum double との関連でもこの grading が，より高い対称性を得るための鍵となる．

3 Quantum double, TQFT, and asymptotic inclusion

Subfactor から生じる TQFT の重要な点は，Drinfeld の quantum double にあたる構成が，組合せ幾何学と作用素環の双方から自然に現われることである．次の 3 つの方法を見よう．

[代数] Drinfeld の quantum double construction

[幾何] Turaev-Viro 型の，triangulation に基づく 3 次元 TQFT

[解析] Ocneanu の asymptotic inclusion と central sequence subfactor

実はこれらは，conceptual には同様なものを，全く違った方法で実現する 3 つの仕組みと考えられるのである．大雑把にいえば，これらはいずれもある対象を，それと “対” になる対象（dual, complex conjugate, opposite など）と組合せ，さらに対称性を高める操作を加えたものと考えられる．Quantum double の場合は，まさにそのとおりだし，asymptotic inclusion とは，$N \subset M$から $M \otimes (M' \cap M_\infty) \subset M_\infty$ を作る操作である．(M_∞は，Jones tower の “極限” として得られる II_1 factor である．）ここで，AFD かつ finite depth という仮定の下では，$M' \cap M_\infty$は，Mの opposite algebra（積の順番をひっくりかえしたもの）に同型になるのである．Central sequence subfactor の場合は，より解析的な構成だが，代数的な見地からは，asymptotic inclusion と本質的に同一の paragroup を作る機構と見なされる．Triangulation に基づく TQFT の場合は，あまり “double” の様に見えないかもしれないが，これについてはあとで説明する．

有限群 G から出発したとき，上の 3 つは，実際に同じものを与える．TQFT（この場合は，Dijkgraaf-Witten による）と quantum double については，このことは Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde の仕事に基づき Dijkgraaf-Pasquier-Roche によって指摘された．Central sequence subfactor と Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde の関係は，Ocneanu による．

Subfactor $N \subset M$から出発して paragroup を作っても，一般には得られる対称性は実はそれほど高くない．したがって，Moore-Seiberg 型 RCFT や，Resheteikhin-Turaev 型 TQFT を作ろうとしても一般にはできないのである．しかし，Tureav-Viro 型 TQFT はいつでもできるので，その際得られる, 2 次元トーラスに対応する有限次元 Hilbert 空間 $H_{S^1\times S^1}$ を調べてみよう．TQFT の一般論では本来，これは "表現もどき"（conformal block，量子群の表現など）か，そのペアが自然な基底を与えると期待される．今，"表現もどき" は，bimodule であるわけだが，一般には bimodule をどう組み合わせても $H_{S^1\times S^1}$の基底になっていない．実際は，作用素環の方で，$N \subset M$をもっといいものに取り替えないと，正しい構造は見えて来ないのである．すなわち，asymptotic inclusion（finite index, finite depth を持つ）に移ったあとの $M\otimes(M'\cap M_\infty) \subset M_\infty$に対応する M_∞-M_∞ bimodule がこの Hilbert 空間の自然な基底を与えるのである.（厳密には，fusion graph の連結性という条件が必要である．たいていの興味ある例では，この仮定は満たされている.）そして，この M_∞-M_∞ bimodule の世界では，fusion algebra は可換となり．S, T行列が存在し，S行列は fusion rule を対角化し，T行列は 1 の巾根を対角成分に持つ対角行列になる．これらは，RCFT における，Verlinde や Vafa の結果の類似である．この事の証明には，bimodule を 2 次元の絵で表す Ocneanu の方法が使われる．特に，彼の導入した tube algebra の center の minimal projecton と，既約 M_∞-M_∞ bimodule の図形的対応がポイントである．

Asymptotic inclusion での，$M\otimes(M'\cap M_\infty)$-$M\otimes(M'\cap M_\infty)$ bimodule の方は，単に元の M-M bimodule のペアである．すなわち，この段階では，単に "double" を作って水増ししただけであり，それが grading にを用いて，M_∞-M_∞ bimodule に移行することによって，S, T 行列などの高い対称性が得られるのである．ここでも bimodule の grading が効いている．この立場からは，asymptotic inclusion は，paragroup に対する quantum double construction と言ってもよい．

さて，Turaev-Viro 型の TQFT であるが，"double" と思う理由は，十分対称性の高いデータ（RCFT など）から出発したときには，Reshetikhin-Turaev 型 TQFT が単に二重に水増しされているだけだからである．この事は，少しも自明でないが，$SU(2)_k$の場合は，上述

のように，Turaev によって示された．Turaev は，もっと一般化した定理も証明しており，Ocneanu も作用素環論を用いて，一般的な命題を得ている．すなわち，作用素環論的に高い対称性が初めからあれば，Reshetikhin-Turaev 型 TQFT と Turaev-VIro 型 TQFT の双方が同じ subfactor から作れて，後者は，前者とその複素共役との tensor 積に分解する，というのである．([13] における chirality の話を参照.)

4 Orbifold construction

最後に orbifold construction の TQFT における意味に関する，“期待” を説明しよう．まず，orbifold consruction は，CFT に源を持ち，可解格子模型での，Fendley, Ginsparg, Kostov, Roche, Zuber らの方法に基づき，subfactor では，[6] で最初に用いられた．その後，[1] で一般的な方法として確立され，さらに F. Xu によって，RCFT との関係が明らかにされた．最近では，後藤 [5] によって，代数的に一般化されている．

これは paragroup をある対称性で “割る” というアイディアで，最初は，Dynkin 図形 A_{4n-3}を $\mathbf{Z}_2$で割って，Dynkin 図形 D_{2n}を得るのに [6] で使われた．(A_{4n-1} の場合は，flatness に関する obstruction が発生するので，割っても A_{4n-1}のままである．この obstruction は，RCFT の conformal dimension で与えられる事を Xu が示した.) ここで現われる symmetry は，subfactor $N \subset M$の自己同型と見なすことが可能である.(すなわち，Mの自己同型で，Nを global に動かさないものができる.) すると，その自己同型は，泉の仕事に現われるものと同じであることが，長田-幸崎の条件を用いて示される．また，解析的な立場からは，この自己同型は，centrally trivial という条件でも特徴付けられ，Connes の有名な不変量$\chi(M)$ の subfactor 版 [7] を与える．このように，いろいろな立場から見ることができる，重要な自己同型なのであるが，TQFT との関連を見てみよう．すると，この自己同型は，自然に central sequence subfactor の intermediate subfactor を与えることがわかる．しかも，この intermediate subfactor は，$\mathbf{Z}_n$作用による不動点環として現われる．一般に，intermediate subfactor があれば，もと

の subfactor は，primitive な object ではないということだし，今の場合は，さらに，asymptotic inclusion は，“つまらない” 対称性を余分に含んでいる，ということになる．そのようなものは，本来の “quantum symmetry” ではないのだから，取り除いて考えるべきである．この，つまらない対称性を取り除くという作用を，orbifold construction が持っている，というのがここで期待されるところである．

[ここでは，直接関係する作用素環論の論文しか引用していない．他の文献について詳しくは，以下の論文の引用文献リストを見よ．]

References

[1] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Orbifold subfactors from Hecke algebras*, to appear in Comm. Math. Phys.

[2] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *From subfactors to* 3*-dimensional topological quantum field theories and back*, to appear in Astérisque.

[3] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Subfactors and conformal field theory*, in “Quantum and non-commutative analysis”, 341–369, Kluwer Academic (1993).

[4] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles*, in preparation.

[5] S. Goto, *Orbifold construction for non-AFD subfactors*, 東京大学修士論文, 1994.

[6] Y. Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors*, to appear in J. Funct. Anal.

[7] Y. Kawahigashi, *Centrally trivial automorphisms and an analogue of Connes' $\chi(M)$ for subfactors*, Duke Math. J. **71** 93–118, (1993).

[8] Y. Kawahigashi, *Subfactor* の量子 *Galois* 群としての *paragroup*, "数学" **45** 346–358, (1993).

[9] Y. Kawahigashi, *Classification of paragroup actions on subfactors*, preprint 1993.

[10] A. Ocneanu, *Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, pp. 119–172, (1988).

[11] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", University of Tokyo Seminary Notes 45, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), (1991).

[12] A. Ocneanu, *An invariant coupling between* 3*-manifolds and subfactors, with connections to topological and conformal quantum field theory*, unpublished announcement, (1991).

[13] A. Ocneanu, *Chirality for operator algebras*, (recorded by Y. Kawahigashi), to appear in Proceedings of the Taniguchi Symposium, 1993, World Scientific.