トーラス上の Dirac 作用素の正方格子による有限次元近似

東大数理 古田幹雄

概要

この予稿では次のふたつを説明する。

（１）K 群のふたつの要素の一致を示すひとつの手法の提示する。正確には、そのような手法を用いて逆に K 群のひとつの定式化を与える。

（２）トーラス上の Dirac 作用素の指数と、その作用素の正方格子による有限次元近似の指数との一致の証明を与える。その際に上の定式化を用いる。

目次

1 はじめに

1.1 説明することと説明しないこと

この予稿の第一の目標は Dirac 作用素の離散版を導入するときにゆきあたる困難の説明である*1。Dirac 作用素の離散版の構成において次のふたつの要請は自然である。

（1）固有値が実となる self-adjoint operator であってほしい

（2）固有値の大きさが小さい固有関数を考えるとき、格子間隔程度の短い波長をもつ「アーティファクト」が出現をしないでほしい

しかし、これらは両立しない*2。そのため、アーティファクトを事実上排除するための工夫が必要となる。そのために格子ゲージ理論で用いられているひとつの方法が Wilson 項の導入である。

この予稿の第二の目標は、Wilson 項を導入すると、Dirac 作用素の離散版におい

*1 この原稿では離散版としては、トーラスに対する正方格子による近似のみを考える。

*2 この非両立性は、物理学で知られる「Nielsen-二宮の定理」に相当する

て「Fredholm index」の類似を導入でき[*3]その離散版が連続版の十分細かい近似として得られる場合には、もともとの連続版の Dirac 作用素の Fredholm index と一致することを示すことである[*4]

「本来の連続版の Dirac 作用素では成立するがそのナイーブな要請（1）をみたす離散版では成立しない性質」としてアプリオリ評価がある。

我々の議論の鍵は、Wilson 項を導入した Wilson-Dirac operator においてはアプリオリ評価が成立することである。

この予稿においては

（1）K 群の定式化[*5]：議論のために便利な定式化を与える (Definition 3)

をしたあと、目標である

（2）Dirac 作用素の格子での離散版と連続版との指数の比較 (Theorem 51)

を説明する。

ポイントは、次の点である。

（1）について：K 群の要素を集合としてまず identify する。

（2）について：数値的な指数の値の考察の一歩手前で、K 群の要素として直接比較する。

この予稿では次の 4 カ所において、K 群のふたつの要素の一致を示す同様の議論がおこなわれている。

1. $KO^0(\{*\}, \emptyset)$ の要素の「指数」による特徴づけ (Theorem 20)
2. $KO^1(D^1, S^0)$ の要素の「スペクトル流」による特徴づけ (Theorem 34)
3. 連続な Dirac 作用素の指数とその格子近似の指数を比較する主定理 (Theorem 51)
4. $KO^0(X, A)$ の要素とその有限階数ベクトル束を使った表示との比較（Theorem 57)[*6]

いずれも、この予稿における KO の定義の方法が有効に利用されている。

なお、この予稿で「説明すべきであるが説明していないこと」として次がある。

[1-1] Degree が 0 でない場合について、Clifford 代数を用いた K 群の表示が標準的な定義と同等であることの証明[*7]

[1-2] $K.KO$ の一般の degree における有限次元的な表示可能性について[*8]。

[*3] これは物理学で知られていた

[*4] これも数学的に D. Adams によってすでに知られていた。ただし、従来の議論では、対称性のある場合、族の場合、Clifford 作用などがある場合（$\mathbf{Z}_2$ 値の指数をもつ場合など）については扱えなかった。今回の議論は物理学者の深谷英則、山口哲、大野木哲也の三氏と、数学者の松尾信一郎、山下真由子との共同研究である。論文準備中。

[*5] この原稿は実 K 群のみを考える。複素ベクトル束を用いれば複素 K 群の記述となる。

[*6] 実質的に、Fredholm 作用素の族に対する指数の構成の well-definedness に相当する命題である。

[*7] Degree が 0 の場合と $KO^1(D^1, S^0)$ については証明を与える。論理的には最低限これで十分である。ただし族版への議論の拡張のためには、一般の場合の同等性を確立しておく必要がある。そのためのひとつの方法は [1-2] である。

[*8] Karoubi による K 群の記述、あるいは (symmetric) unitary operator による K 群の記述が必要となる。

[1-3] Bott 周期性の証明

[2-1] Overlap fermion の定式化と Karoubi による K 群の表示の関係

[2-2] 格子上の作用素についての基本的な解析的評価の証明の細部。

[2-3] Clifford 代数による対称性をもつ場合の拡張について。

[3-1] Dirac 作用素などの楕円型微分作用素においてアプリオリ評価が Fredholm 性を導くこと。

1.2 背景

・格子ゲージ理論において Dirac 作用素の離散版の指数の考察は前世紀から行われていた。

・数学的な扱いは David Adams により、熱核による指数の記述の格子版の考察によって与えられている[*9]。

・格子版の指数定理については山下真由子氏、および山下氏と窪田陽介氏による最近の理論がある。

・この予稿があつかうのは、指数定理ではなく、ふたつの作用素の指数の比較のみである。

・いくつかの参考文献について Appendix で説明を行った。

1.3 記号

・作用素 A, B に対してその反交換子、交換子についてしばしば次の記号をもちいる[*10]

$$\{A, B\} := AB + BA, \quad [A, B] := AB - BA$$

・以下の記述では群作用によってすべての構造が保たれているときに並行した議論が可能である。しかしこの対称性については以下とくに言及しない。また、すべての構造が、あるコンパクト Hausdorff 空間をパラメータ空間とする連続族によって与えられているとき、族ヴァージョンについても並行した議論が可能である。これについても、以下とくに言及しない[*11]。

Clifford 作用の対称性については説明を与える。

・ベクトル空間、Hilbert 空間はすべて実ベクトル空間、実 Hilbert 空間である[*12]。

---

*9 閉多様体上の族の version を熱核の方法によって扱うことが可能であると Adams によってアナウンスされている。詳細は未発表。なお熱核による方法では、$\mathbf{Z}_2$ 値の指数や族の場合の torsion をとらえることが困難である。K 群レベルで直接比較すると、これらの難点がクリアされる。

*10 次のような使い方もするが、まぎれはないであろう。$m_0 > 0$ に対して $[-m_0, m_0] = \{m \in \mathbf{R} : -m_0 \le m \le m_0\}$ および $\{-m_0, m_0\} = \{m \in \mathbf{R} : m = -m_0$ あるいは $m = m_0\}$。

*11 しかし、これらの拡張を直ちに許すことが、ここで行う素朴なアプローチのひとつの特徴である。

*12 複素ベクトル空間としての構造は、計量をたもつ自己同型 J であって $J^2 = -1$ を満たすものをもちいて、群 $\{\pm 1, \pm J\}$ の作用をもちいて扱うことができる。

・ベクトル束は、Riemann 計量の入った閉多様体の上のなめらかな実ベクトル空間のみを考える。また、各ファイバーには計量が与えられ、その内積は局所座標表示をするとき底空間についてなめらかであると仮定する。

・内積の記号は、ベクトル空間については $(*,*)$、ベクトル束の切断に対しては $\langle *|*\rangle$ をもちいる。

・ベクトル束の切断の上の作用素 A に対して、u と Au の内積を $\langle *|A|*\rangle$ とかく。

2 $KO^0(X,A)$

本章と次の章において KO 群のひとつの定式化を準備する[*13]。

2.1 Notations

X : コンパクト Hausdorff 空間
A: X の閉部分空間
これらに対して $KO^0(X,A)$ の定義をあたえる。

2.2 $KO^0(X,A)$ の要素の代表元

しばらく X,A を固定し、ペア (X,A) を考える。

Definition 1. $(\mathcal{H},h,\gamma)$ がペア (X,A) に対する三つ組であるとは次の条件をみたすことである。

1. $\mathcal{H}$ は X 上の実 Hilbert 束。点 $x\in X$ におけるファイバーを $\mathcal{H}_x$ と書くことにする
2. $h:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は、bounded self-adjoint Fredholm operator $h_x:\mathcal{H}_x\to\mathcal{H}_x$ $(x\in X)$ の作用素ノルムに関する連続族[*14]
3. $\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は、orthogonal かつ self-adjoint な作用素の連続族[*15]
4. h と γ は反可換： $\{\gamma,h\}=0.$
5. $x\in A$ に対して $\operatorname{Ker} h_x=0$

Remark 2. この章だけを読むときは、すべての箇所で「実 Hilbert bundle」を「有限階数の実ベクトル束」とよみかえ、「bounded self-adjoint Fredholm operator 」は「連続な self-adjoint operator」とよみかえても、数学的には差し支えない。その

[*13] 専門家には、ここでの定式化が標準的な定式化と同値であることは明らかであると思われる。KO^0 のここでの定義と標準的な定式化との一致については Appendix B で証明を与える。なお Appendex A で説明した観察は、文献を見つけられなかった。

[*14] すなわち $\mathcal{H}$ の局所自明化をもちいて表示するとき、h_x は x について作用素ノルムに関して連続に変化する。

[*15] すなわち $x\in X$ ごとに内積をたもつ線形写像 $\gamma_x:\mathcal{H}_x\to\mathcal{H}_x$ であって $\gamma_x^2=1$ となるものが与えられ、$\mathcal{H}$ の局所自明化をもちいて表示するとき、γ_x は x について作用素ノルムに関して連続に変化する。

ように対象や同値関係を制限したとしても、最終的に定義される $KO^0(X,A)$ は同じである[*16]。また、この章で主張される命題と議論は、この読み替えの下ですべてそのまま成立する。詳しくは Remark 21 を参照のこと

Definition 3. ペア (X,A) に対する二つの三つ組 $(\mathcal{H},h,\gamma)$, $(\mathcal{H}',h',\gamma')$ に対して関係

$$(\mathcal{H},h,\gamma)\sim(\mathcal{H}',h',\gamma')$$

が成立するとは、ペア (X,A) に対する三つ組 $(\hat{\mathcal{H}},\hat{h},\hat{\gamma})$ と $0\le t\le 1$ をパラメータとする bounded self-adjoint Fredholm operator の変形族

$$\tilde{h}_t:\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'\oplus\hat{\mathcal{H}}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'\oplus\hat{\mathcal{H}}$$

が存在し次をみたすこととする：

1. $(\hat{\mathcal{H}},\hat{h},\hat{\gamma})$ はペア (X,X) に対する三つ組である。すなわち任意の $x\in X$ に対して $\operatorname{Ker}\hat{h}_x=0$ である。
2. $\tilde{h}_0=-h\oplus h'\oplus\hat{h}$
3. 任意の $(x,t)\in A\times[0,1]\cup X\times\{1\}$ に対して $\operatorname{Ker}(\tilde{h}_t)_x=0$ である[*17][*18]。

以後、記号の煩雑さをさけるため、場合によっては、三つ組 $(\mathcal{H},h,\gamma)$ をあらわすとき h のみを指示することがある。たとえば、関係式 $(\mathcal{H},h,\gamma)\sim(\mathcal{H}',h',\gamma')$ のかわりに $h\sim h'$ などとかく場合がある。

直観的にいうなら、

『ペア (X,A) のふたつの三つ組 h,h' に対して関係式 $h\sim h'$ が成立するとはペア (X,X) に対する三つ組 $\hat{h}$ を適当にとると、ペア (X,A) に対する三つ組 $-h\oplus h'\oplus\hat{h}$ を「ペア (X,A) に対する三つ組の条件を満たしながら」ペア (X,X) に対する三つ組に連続変形することができることである。』

Proposition 4. (X,A) に対する三つ組たちの間の関係 $\sim$ は同値関係である。

Proof. 対称律、反射律、推移律の成立を示せばよい。これは次の subsection において Lemma 6, Lemma 7, Lemma 8 において各々示される。 □

上の Proposition を認めたうえで、次の定義をおく。

Definition 5. $KO^0(X,A)$ とはペア (X,A) に対する三つ組の $\sim$ に関する同値類の全体の集合である[*19]。

[*16] 証明は Appendix の Theorem 59 において与える

[*17] 言い換えると次のようになる。射影 $X\times[0,1]\to X$ を p とかき、$\tilde{h}_t$ をすべての $t\in[0,1]$ に対して一挙に考えたものを $\tilde{h}$ とかくとき、$(p^*(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'\oplus\hat{\mathcal{H}}),\tilde{h},p^*(-\gamma\oplus\gamma'\oplus\hat{\gamma}))$ はペア $(X\times[0,1],A\times[0,1]\cup X\times\{1\})$ に対する三つ組である。さらに、この条件は「ペア $(X\times[0,1],A\times[0,1]\cup X\times\{1\})$ に対する三つ組が存在し、それを $(X\times\{0\},A\times\{0\})$ に制限すると $-h\oplus h'\oplus\hat{h}$ と同型」という条件と同値である。しかしこの同値性の証明は少しテクニカルであるので、ここではあとで直接もちいる形の定義を与えた

[*18] イメージとしては「$(-\alpha+0)+(\alpha'+0)=0$ であれば $\alpha=\alpha'$」

[*19] テクニカルなことであるが、三つ組全体は「集合」ではない。しかし同値類全体は「集合」になる。これ

2.3 $\sim$ が同値関係であること

三つ組たちに対する関係 $\sim$ が同値関係であることを示す。

Lemma 6. (対称律) 二つの三つ組 $(\mathcal{H}, h, \gamma)$, $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ に対して関係 $(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}', h', \gamma')$ が成立するとき $(\mathcal{H}', h', \gamma') \sim (\mathcal{H}, h, \gamma)$ が成立する。

Proof. 関係 $(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}', h', \gamma')$ を与えるデータの写像をすべて「マイナス 1 倍」すると、逆の関係 $(\mathcal{H}', h', \gamma') \sim (\mathcal{H}, h, \gamma)$ を与えるデータとなる。 □

Lemma 7. (反射律) 三つ組 $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ に対して関係

$$(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}, h, \gamma)$$

が成立する。

Proof. $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{h}, \hat{\gamma}) = (0, 0, 0)$ ととることとし、

$$\tilde{h}_t := (1-t)\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$(p^*(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}), \tilde{h}, p^*(-\gamma \oplus \gamma))$$

が $(X \times [0,1], A \times [0,1] \cup X \times \{1\})$ に対する三つ組であることを示せば十分である。次の $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \mathbf{R}^2$ 上の 3 つの作用素がたがいに反可換であることに注意する。

$$\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

これからまず、$\tilde{h}$ と $p^*(-\gamma \oplus \gamma)$ の反可換性がわかる。

$t = 0$ かつ $x \in A$ のときには $\tilde{h}_{t,x} = -h \oplus h$ は Kernal がゼロである。よってあとは $t > 0$ のとき任意の $x \in X$ に対して $\tilde{h}_{t,x}$ の Kernel がゼロであることを示せば十分である。$\tilde{h}_t$ を与える二項の反可換性から

$$\tilde{h}_t^2 := (1-t)^2\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}^2 + t^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \{(1-t)h^2 + t^2\} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これは $t > 0$ のとき常に positive な self-adjiont operator であり、kernel はゼロである。 □

Lemma 8. (推移律) 3 つの三つ組 $(\mathcal{H}, h, \gamma)$, $(\mathcal{H}', h', \gamma')$, $(\mathcal{H}'', h'', \gamma'')$ に対して関係 $(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}', h', \gamma')$ および $(\mathcal{H}', h', \gamma') \sim (\mathcal{H}'', h'', \gamma'')$ が成立するとき $(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}'', h'', \gamma'')$ が成立する。

はたとえば同値類の代表元として、$\mathcal{H}$ が有限階数のベクトル束であるものが存在することを示すことによって（後述）チェックされる。（代表元をそのようにえらぶと、$\mathcal{H}$ の集合としての濃度が有界であることに注意）

Proof. $h \sim h'$ の定義にあらわれるデータを $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{h}, \hat{\gamma})$ および $\tilde{h}$ とする。同様に $h' \sim h''$ の定義にあらわれるデータを $(\hat{\mathcal{H}}', \hat{h}', \hat{\gamma}')$ および $\tilde{h}'$ とする。

ペア (X, A) に対する三つ組 $(\hat{\mathcal{H}}'', \hat{h}'', \hat{\gamma}'')$ を次で定めると、これはペア (X, X) に対する三つ組になっている。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}'' &:= \hat{\mathcal{H}} \oplus \hat{\mathcal{H}}' \oplus (\mathcal{H}' \otimes \mathbf{R}^2) \\ \hat{h}'' &:= \hat{h} \oplus \hat{h}' \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\gamma}'' &:= \hat{\gamma} \oplus \hat{\gamma}' \oplus \begin{pmatrix} -\gamma' & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemma 7 の証明中でおこなったように、上の三つ組にあらわれる作用素 $\tilde{h}''$ を次の作用素と linear に結ぶとき、ペア (X, A) の三つ組としての変形になっている。

$$\hat{h} \oplus \hat{h}' \oplus \begin{pmatrix} -h' & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} \qquad \text{on} \qquad \hat{\mathcal{H}} \oplus \hat{\mathcal{H}}' \oplus (\mathcal{H}' \otimes \mathbf{R}^2)$$

すなわち

$$(\hat{h} \oplus \hat{h}') \oplus (-h' \oplus h') \qquad \text{on} \qquad (\hat{\mathcal{H}} \oplus \hat{\mathcal{H}}') \oplus (\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}')$$

これを利用して $h \sim h''$ が次のように示される。実際、$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'' \oplus \hat{\mathcal{H}}''$ の上の作用素

$$-h \oplus h'' \oplus \hat{h}''$$

に対して、ペア (X, A) の三つ組の条件を保ったまま、つぎのふたつの変形をひきつづき行うことによってペア (X, X) の三つ組に変形することができる。

第一の変形として、これの $\hat{h}''$ の部分だけ（ペア (X, A) の三つ組としての条件を保ちながら）上の変形を行うと次になる。

$$-h \oplus h'' \oplus (\hat{h} \oplus \hat{h}') \oplus (-h' \oplus h') \qquad \text{on} \qquad \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'' \oplus (\hat{\mathcal{H}} \oplus \hat{\mathcal{H}}') \oplus (\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}')$$

第二の変形として、まず順序をいれかえるとこれをつぎのようにかくことができる。

$$(-h \oplus h' \oplus \hat{h}) \oplus (-h' \oplus h'' \oplus \hat{h}') \qquad \text{on} \qquad (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' \oplus \hat{\mathcal{H}}) \oplus (\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' \oplus \hat{\mathcal{H}}')$$

これは作用素 $\tilde{h} \oplus \tilde{h}'$ の $t = 0$ への制限である。$t = 1$ ではペア (X, X) の三つ組となっている。 $\square$

2.4 KO^0 の和と積と関手性

2.4.1 引き戻しによる関手性

X, Y がコンパクト Hausdorff 空間であり、A, B は各々 X, Y の閉部分集合であるとする。連続写像 $f : X \to Y$ が $f(A) \subset B$ をみたすとき、$f : (X, A) \to (Y, B)$ と略記する。

連続写像 $f:(X,A)\to(Y.B)$ が与えられたとき、引き戻しによってペア (Y,B) に対する三つ組からペア (X,A) に対する三つ組が得られる。Hilberg 束、またその上の写像の f による引き戻しを記号 f^* によってあらわす。この引き戻しは、$\sim$ による同値関係をたもつことが容易にわかる[*20]。これから写像

$$f^*:KO^0(Y,B)\to KO^0(X,Y),\qquad [(\mathcal{H},h,\gamma)]\mapsto[(f^*\mathcal{H},f^*h,f^*\gamma)]$$

がえられる。また、$f:(XA)\to(Y,B)$ およぎ $g:(Y,B)\to(Z,C)$ の合成 $gf:(X,A)\to(Z,C)$ に対して $(gf)^*=f^*g^*$ も構成からあきらかである。また、以下に定義される KO^0 の上の和と積の構造は、引き戻しによって保たれることがやはりただちに示される。これを先取りして述べるなら上の観察は次のようにまとめられる。

Proposition 9. KO^0 は、「ペア (X,A) を object としそれらの間の連続写像を morphism とするカテゴリー」から、「環を object とし準同型を morphism とするカテゴリー」への反変関手である。 □

以下、この主張が成立するような和と積の構造を定義する。

2.4.2 和

三つ組 $(\mathcal{H},h,\gamma)$, $(\mathcal{H}',h',\gamma')$ に対して、その直和を次のように導入する。

$$(\mathcal{H},h,\gamma)\oplus(\mathcal{H}',h',\gamma'):=(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}',h\oplus h',\gamma\oplus\gamma')$$

直和の同値類は直和をとる前の二つの三つ組の同値類のみに依存することは定義から容易に示される。これをもちいて

Definition 10. $KO^0(X,A)$ の上の和をつぎで定義する。

$$[(\mathcal{H},h,\gamma)]+[(\mathcal{H}',h',\gamma')]:=[(\mathcal{H},h,\gamma)\oplus(\mathcal{H}',h',\gamma')]$$

Lemma 11.
1. $[(\mathcal{H},h,\gamma)]+[(0,1,1)]=[(\mathcal{H},h,\gamma)]$
2. 和は交換則と結合則をみたす。
3. $[(\mathcal{H},h,\gamma)]+[(\mathcal{H},-h,-\gamma)]=[(0,1,1)]$

Proof. はじめのふたつの主張は $\sim$ が反射律をみたすことから従う。反射律 Lemma 7 の証明は、ペア (X,A) に対する三つ組 $(\mathcal{H},h,\gamma)\oplus(\mathcal{H},-h,-\gamma)$ の中の作用素 $h\oplus(-h)$ を変形しペア (X,X) に対する三つ組を構成するものであった。これから最後の主張も従う。 □

これから $KO^0(X,A)$ が和に関して可換な群になることがわかる。単位元 $[(0,1,1)]$ のことを 0 とかく。$[(\mathcal{H},h,\gamma)]$ の逆元は $[(\mathcal{H},-h,-\gamma)]$ である[*21]。すると、$\sim$ の定義から、ただちに次がいえる。

[*20] $\sim$ の定義にあたえられるデータをすべて引き戻すことによって示される。

[*21] データにあらわれるすべての作用素をマイナス１倍したものが逆元である。後で γ 以外の Clifford 対称性を導入するときには、h をマイナス１倍するとともに Clifford 対称性をあらわすすべての生成元を一斉にマイナス１倍する操作に対応する。

Lemma 12. ペア (X,A) に対する三つ組 $(\mathcal{H}.h.\gamma)$ が $[(\mathcal{H}.h.\gamma)]=0$ をみたすための必要十分条件は、ペア (X,X) に対するある三つ組 $(\hat{\mathcal{H}},\hat{h},\hat{\gamma})$ が存在し、三つ組

$$(\mathcal{H}\oplus\hat{\mathcal{H}},h\oplus\hat{h},\gamma\oplus\hat{\gamma})$$

の中のデータ $h\oplus\hat{h}$ をペア (X,A) に対する三つ組の条件をたもったまま変形し、ペア (X,X) に対する三つ組にすることが可能なことである[*22]。 □

逆元にたいして次の表示もある。

Lemma 13. $[(\mathcal{H},h,\gamma)]+[(\mathcal{H},h,-\gamma)]=0$ が成立する。すなわち $[(\mathcal{H},h,\gamma)]$ の逆元のひとつの表示として $[(\mathcal{H},h,-\gamma)]$ がある[*23]

Proof. Lemma 12 を用いる。ペア (X,A) に対する次の三つ組

$$(\mathcal{H},h,\gamma)\oplus(\mathcal{H},h,-\gamma)=\left(\mathcal{H}\otimes\mathbf{R}^2,\begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{pmatrix},\right)$$

の中にあらわれる作用素は、 パラメータ $0\le t\le 1$ による次の変形を許す。

$$\tilde{h}_t:=(1-t)\begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$$

ここで次の 3 つの作用素が反可換であることに注意する。

$$\begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix} 0 & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{pmatrix}$$

よって $\tilde{h}_t$ はペア (X,A) に対する三つ組としての変形であり、かつ $\tilde{h}_1$ はペア (X,X) に対する三つ組である。 □

Remark 14. Lemma 11, Lemma 13 から

$$[(\mathcal{H},h,\gamma)]=[(\mathcal{H},-h,\gamma)]\in KO^0(X,A)$$

がわかる[*24]。

[*22] イメージとしては「$\alpha+0=0$ であれば $\alpha=0$」

[*23] 後で γ 以外の Clifford 対称性を導入するときには、h をかえずに **C**lifford 対称性の生成元のうちひとつだけをマイナス 1 倍する操作に対応する。あるいは、言い換えると、Clifford 対称性の定式化に用いられる Clifford 代数 $Cl(V)$ のもととなる**非**退化計量つき有限次元実ベクトル空間 V の「向き」を逆にする操作として一般化される。

[*24] 後で定義される $KO^i(X,A)$ において対応する命題では i の偶奇におうじてプラスマイナスの符号がつく。

2.4.3　積

Lemma 15. A, B をコンパクト Hausdorff 空間 X の閉部分集合とする。(X, A) に対する三つ組 $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ と (X, B) に対する $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ に対して、次の「積」は $(X, A \cup B)$ に対する三つ組である[*25]。

$$(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}', (h \otimes 1) + (\gamma \otimes h'), \gamma \otimes \gamma')$$

また、この三つ組の $KO^0(X, A \cup B)$ における同値類は、「積」を取る前のふたつの三つ組の（各々 $KO^0(X, A)$ および $KO^0(X, B)$ における）同値類のみに依存する。

Proof. 上の三つ組がまずペア $(X, \emptyset)$ に対する三つ組であることは次の 3 つの作用素は互いに反可換であることから従う。

$$h \otimes 1, \qquad \gamma \otimes h', \qquad \gamma \otimes \gamma'$$

またこの反可換性から

$$\{(h \otimes 1) + (\gamma \otimes h')\}^2 = (h \otimes 1)^2 + (1 \otimes h')^2$$

となり、右辺は非負の self-adjoint operator の和である。この作用素が kernel をもつのは各々の項が同時に kernel を場合に限られる。よって $A \cup B$ 上において kernel はゼロである。同値類としての一意性に関する主張は、次のように示される。方針のみ記す。$(\mathcal{H}', h', \gamma')$ は動かさず $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ をそれと同値な三つ組にとりかえた場合をまず考察する。同値関係を定義する"$\hat{h}, \tilde{h}$" たちに対して、上の「積」と同じ形の構成を行って得られる作用素たちが、求める同値性を保証している。逆に $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ は動かさず $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ をそれと同値な三つ組にとりかえた場合も同様である。 □

この Lemma によって次の定義ができる。

Definition 16. A, B をコンパクト Hausdorff 空間 X の閉部分集合とする。積

$$KO^0(X, A) \times KO^0(X, B) \to KO^0(X, A \cup B)$$

を、次によって定義する。

$$([(\mathcal{H}, h, \gamma)], [(\mathcal{H}', h', \gamma')]) \mapsto [(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}', (h \otimes 1) + (\gamma \otimes h'), \gamma \otimes \gamma')]$$

Lemma 17.
1. 積は結合則をみたす。identity である。
2. 積と和は、左分配法則および右分配則をみたす。
3. 要素 $[(\mathbf{R}, 0, 1)] \in KO^0(X, \emptyset)$ と、左あるいは右から積をとる操作は identity である。

[*25] Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}'$ のテンソル積 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ は、代数的に定義されるテンソル積の完備化として定義される： 代数的に定義されるテンソル積の上には自然に内積がはいっている。その内積に関する完備化。$\mathcal{H}$ 上の有界作用素と $\mathcal{H}'$ 上の有界作用素の代数的に定義されるテンソル積は、その完備化の上に一意的に拡張される。これを、単に作用素同士のテンソル積の記号であらわす。

Proof. 結合則は次のようにチェックされる。$\alpha = [(\mathcal{H}, h, \gamma)] \in KO^0(X, A)$, $\alpha' = [(\mathcal{H}', h', \gamma')] \in KO^0(X', A')$, $\alpha''[(\mathcal{H}'', h'', \gamma'')] \in KO^0(X, A'')$ に対して $(\alpha\alpha')\alpha''$ および $\alpha(\alpha'\alpha'')$ はいずれも次で与えられる。

$$[(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}', h \otimes 1 \otimes 1 + \gamma \otimes h' \otimes \gamma'' + \gamma \otimes \gamma' \otimes h'', \gamma \otimes \gamma' \otimes \gamma'')]$$

左および右分配則も定義にしたがって両辺を書き下すと一致する。$[(\mathbf{R}, 0, 1)]$ が" 単位元" であることも定義から従う。 □

Theorem 18. 積 $KO^0(X, A) \times KO^0(X, B) \to KO(X, A \cup B)$ は、可換である。すなわち、この写像は、定義域の二成分のいれかえ $KO^0(X, A) \times KO^0(X, B) \to KO^0(X, B) \times KO^0(X, A)$ と積 $KO^0(X, B) \times KO^0(X, A) \to KO(X, A \cup B)$ の合成と一致する。

Proof. Appendix の Proposition 55 においてひとつの証明をあたえる。 □

Definition 19. (X, A) および (Y, B) が各々コンパクト Hausdorff 空間 X, Y とそれらの閉部分空間 $A \subset X$ および $B \subset Y$ からなる二つのペアであるとき、射影

$$p_X : X \times Y \to X, \qquad p_Y : X \times Y \to Y$$

による引き戻し

$$p_X^* : KO^0(X, A) \to KO^0((X, A) \times (Y, B)), \qquad p_Y^* : KO^0(Y, B) \to KO^0((X, A) \times (Y, B))$$

を経由して積をとることにより、**外部積**

$$KO^0(X, A) \times KO^0(Y, B) \to KO^0((X, A) \times (Y, B))$$

が定義される[*26]。

2.5 $KO^0(\{*\}, \emptyset)$ と Fredholm 指数

X が一点で A が空集合である場合を考える。$(\mathcal{H}, h, \gamma)$ が一点上の三つ組であるとき、$\mathcal{H}$ は単一の Hilbert 空間である。

このとき、self-adjoint Fredholm operator を用いる我々の定式化において、$KO^0(\{*\}, \emptyset)$ についての次の考察は、「Fredholm operator の指数の摂動不変性」の確立と同等である。

Theorem 20. (Fredholm 指数) 次の同型が成立する。

$$KO^0(\{*\}, \emptyset) \cong \mathbf{Z}, \qquad [(\mathcal{H}, h, \gamma)] \mapsto \operatorname{trace} \gamma|_{\operatorname{Ker} h}$$

生成元は積の単位元 $[(\mathbf{R}, 0, 1)]$ によって与えられる。

[*26] $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$

Proof. ひとつの議論の概要のみを紹介する[*27]。

$(\mathcal{H}, h, \gamma)$ が一点集合 $\{*\}$ の上の三つ組であるとする。すなわち、$\mathcal{H}$ は単一の Hilbert 空間である。$d = \operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h}$ であるとき $[(\mathcal{H}, h, \gamma)] = d[(\mathbf{R}, 1, 1)]$ を示す。 アウトラインのみ記す。

● STEP1

$(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}', h', \gamma')$ であるとき $\operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h} = \operatorname{trace}\gamma'|_{\operatorname{Ker} h'}$ をまず確認する。議論は次の (1)(2)(3) である。

(1) ペア (X, X) 上の三つ組 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{h}, \hat{\gamma})$ に対して $Ker\hat{h} = 0$ より $\operatorname{trace}\hat{\gamma}|_{\operatorname{Ker}\hat{h}} = 0$ である。

(2) $\check{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' \oplus \hat{\mathcal{H}}$ 上の作用素を考える。$\check{\gamma} := -\gamma \oplus \gamma' \oplus \hat{\gamma}$ と反可換な任意の bounded self-adjoint Fredholm operator $\check{h}$ と正の実数 Λ に対して、$\operatorname{trace}\check{\gamma}|_{\operatorname{Ker}\check{h}}$ が摂動によって不変であることを下でみる。

(3) この摂動不変性がいれれば $\check{\mathcal{H}}$ 上の作用素 $-h \oplus h' \oplus \hat{h}$ に対しても、次はゼロである。

$$\operatorname{trace}\check{\gamma}|_{\operatorname{Ker}(-h\oplus h'\oplus\hat{h})} = -\operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h} + \operatorname{trace}\gamma'|_{\operatorname{Ker} h'} + \operatorname{trace}\hat{\gamma}|_{\operatorname{Ker}\hat{h}}$$

これは (1) とあわせると求める well-definedness を意味する。

● STEP2

摂動不変性は次の (4)(5)(6) によって示される。

(4) $\check{h}^2$ の固有値 Λ 未満の固有空間の直和を $E_{\check{h}^2<\Lambda}$ とおく。$\check{h}^2$ が Λ 以下に、有限重複度の有限個の固有値以外のスペクトルをもたないとき、次が成立する[*28]。

$$\operatorname{trace}\check{\gamma}|_{E_{\check{h}^2<\Lambda}} = \operatorname{trace}\check{\gamma}|_{\operatorname{Ker}\check{h}}$$

(5) さらに Λ そのものが $\check{h}$ の固有値ではないとき、$\check{h}$ を作用素ノルムに関してわずかに摂動しても、$\check{h}^2$ の Λ 以下の固有値に対応する固有空間の次元は不変であり、それらの固有空間は摂動のパラメータ空間の上で有限階数のベクトル束をなすことが知られている。γ による固有分解はこのベクトル束のベクトル束としての直和分解を与える。よってこのとき上の等式の左辺は、微小な摂動によって不変である。

[*27] 別の方法としては、関数解析としては、より初等的な議論しか用いない次の議論も可能である。ただし、この方法は Clifford 代数による対称性がある場合にそのまま拡張することはできない。h は $\operatorname{Ker}(\gamma - 1)$ に制限すると値は $\operatorname{Ker}(\gamma + 1)$ になる。この制限 $h_{-+} : \operatorname{Ker}(\gamma - 1) \to \operatorname{Ker}(\gamma + 1)$ に対して、

$$\operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h} = \dim\operatorname{Ker} h_{-+} - \dim\operatorname{Coker} h_{-+}$$

である。これが Fredholm 作用素 h_{-+} を摂動しても不変であることを示す。

[*28] これは有限次元ベクトル空間の線形代数における次の事実からの帰結である：E が有限次元の内積空間であり、$\gamma_E \in \operatorname{End} E$ は自乗が 1 である直交変換であり、$h_E \in \operatorname{End} E$ が γ と反可換な対称変換であるとき、$\operatorname{trace}\gamma_E = \operatorname{trace}_{\gamma_E|_{\operatorname{Ker} h_E}}$ 実際、h_E^2 と γ_E は互いに可換な対称変換であるから同時対角化可能である。h_E は対称変換なので固有値ゼロに対応する h_E^2 の固有空間 $\operatorname{Ker} h_E^2$ は $\operatorname{Ker} h_E$ と一致する。固有値 $\Lambda > 0$ の h_E^2 の固有空間の上では、h_E の作用が γ_E の固有値 1 の固有部分空間と固有値 -1 の固有部分空間の間の同型を与える。よって、h_E^2 の固有値 $\Lambda > 0$ の固有空間上で、γ_E の制限の trace はゼロである。

(6) これは、上の等式の右辺が摂動に関して常に不変であることを意味する。

● STEP3

$(\mathcal{H}, h, \gamma)$ が一点集合 $\{*\}$ の上の三つ組であるとする。すなわち、$\mathcal{H}$ は単一の Hilbert 空間である。$N = \operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h}$ であるとき $[(\mathcal{H}, h, \gamma)] = N[(\mathbf{R}, 1, 1)]$ を示す。 アウトラインのみ記す。

h は Fredholm であるから $\operatorname{Ker} h$ は有限次元である。γ の $\mathcal{H}'$ への制限の固有値 $+1, -1$ に対する固有空間の次元を各々 N_+, N_- とおく。$(\mathcal{H}, h, \gamma)$ のこの挙動と似た挙動を示す $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ として次がある。

$$(\mathcal{H}', h', \gamma') := (\mathbf{R}^{N_+} \oplus \mathbf{R}^{N_-}, 0, (+1) \oplus (-1))$$

$N = \operatorname{trace}\gamma|_{\operatorname{Ker} h} = N_+ - N_-$ であるとき $[(\mathcal{H}', h' m \gamma')] = N[(\mathbf{R}, 0, 1)]$ が成立する。

● STEP4

STEP3 から、あとは $(\mathcal{H}', h', \gamma) \sim (\mathcal{H}, h, \gamma)$ を示せば $[(\mathcal{H}, h, \gamma)] = N[(\mathbf{R}, 0, 1)]$ が得られる。そのためには、$\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}$ の上の bounded self-adjoint Fredholm operator $-h \oplus 0$ を bounded self-adjoint Fredholm operator のまま連続に変形して kernel がゼロであるようにできればよい[*29]。

● STEP5

γ の $\mathcal{H}'$ への制限の固有値 $+1, -1$ に対する固有空間の次元は N_+, N_- であるから、$\mathbf{R}^{N+}, \mathbf{R}^{N-}$ からこれらの各々の空間への同型写像 f_+, f_- が存在する。f_+, f_- は計量をたもつ写像をえらんでおく。これらの和は計量をたもつ単射

$$f := f_+ + f_- : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$$

を与える。このとき $0 \leq t \leq 1$ に対して次の変形が求めるものとなっている。また構成の仕方から $f\gamma' = \gamma f$ が成立する。

$$\begin{pmatrix} -h' & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & f^* \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

□

2.6 定義における Hilbert 束の採用についての注

実 Hilbert 束を上の定義で導入について注意を述べる。

[*29] $(\mathcal{H}', h', \gamma) \sim (\mathcal{H}, h, \gamma)$ は次のようにしてもわかる。こちらのほうがやさしいが、一般化が可能な議論を本文では与えておく。γ の $\operatorname{Ker} h, (\operatorname{Ker} h)^{|}$ への制限を $\gamma^0, \gamma^{|}$ とおく。また、h の $(\operatorname{Ker} h)^{|}$ への制限を $h^{|}$ とおく。このとき $[(\mathcal{H}, h, \gamma)] \sim [(\operatorname{Ker} h, 0, \gamma^0)] + [((\operatorname{Ker} h)^{|}, h^{|}, \gamma^{|})]$ である。ここで $\operatorname{Ker}(h^{|}) = 0$ であるから右辺の第二項はゼロである。$(\operatorname{Ker} h, 0, \gamma^0)$ は $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ と同型である。
であることから従う。

Remark 21. 1. この章の説明では、$KO^0(X,A)$ は、上の三つ組たちのある同値関係 $\sim$ に関する同値類の全体のなす集合として定義された。もし、仮に、第一に三つ組たちとして、実 Hilbert bundle が有限階数のベクトル束であるものだけに限り、第二に同値関係 $\sim$ の定義においてもあらわれる実 Hilbert bundle が有限階数であるものだけ考えても、結果として三つ組たちの同値類の全体のなす集合は、やはり同一の $KO^0(Z,A)$ となる。

2. 特に、実 Hilbert 束を使って定義されるどの同値類にも、代表元としても $\mathcal{H}$ が有限階数であるものが存在する。その意味で、「有限次元近似可能」である。
3. よって、$KO^0(X,A)$ の定義に関して実 Hilbert bundle を導入する必要はない。この場合、bounded self-adjoint Fredholm operator とは、対称変換にほかならず、作用素ノルムに関する連続性とは、通常の行列値関数の連続性に他ならない。
4. 実 Hilbert 束を導入して第一のメリットは、γ 作用と反可換な偏微分作用素に対して、「指数」の定義が容易となる。なお有限階数のベクトル束しか導入しない場合には、「指数」は「有限次元近似」を利用して定義される。
5. 実 Hilbert 束を導入する第二のメリットは次である。一般に、整数 i に対して $KO^i(X,A)$ が定義される。特に $KO^0(X,A)$ は $KO^0(X,A)$ に他ならない。$KO^i(X,A)$ の定義のためのひとつの方法は、Clifford 代数の対称性を導入し、$(\mathcal{H},h,\gamma)$ のような対象や $\sim$ の定義において Clifford 代数の対称性を課すことである。この方法をとる場合、$i \neq 0$ のとき、一般には、同値類の代表元として $\mathcal{H}$ が有限階数であるものが存在しない場合がある。よって、Clifford 代数の対称性がある場合に議論を拡張するためには、はじめから実 Hilbert 束を用いて定式化しておくことが便利である。

上の定義では、h として bounded な self-adjoint Fredholm operator の族を採用した。関数解析では、bounded ではない operator もしばしばあらわれる。微分作用素は、設定により、しばしば unbounded となることが普通である。これに関する注を述べる。

Remark 22. 1. 上の三つ組の定義において unbounded operator を許容するように次のように変更を加え、同値関係 $\sim$ の定義にあらわれる operator についても同様の変更を加えたとしても、結果として三つ組たちの同値類の全体のなす集合は、やはり同一の $KO^0(Z,A)$ となる。特に、どの同値類にも、代表元としても $\mathcal{H}$ が有限階数であるものが存在する。

2. 変更の第一は「bounded self-adjoint Fredholm operator」という条件を「定義域が dense である closed operator であって、self-adjoint Fredholm であるもの」に緩めることである。

   このとき、$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への bounded な単調増加関数 $\rho(t)$ （たとえば $\rho(t) = t/(1+t^2)^{1/2}$）に対して $\rho(h_x) : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_x$ が関数解析的に定義される。
3. 変更の第二は、h の連続性についての設定を「$\rho(h_x)$ が作用素ノルムに関して連続」とすることである。
4. $KO^i(X,A)$ の定義において Clifford 代数による対称性を利用する場合も、

unbounded operator の使用は同様に可能である。

結論として、Clifford 代数の対称性をもつ self-adjoint な微分作用素の指数を扱う場合には、実 Hilbert 束を利用し、unbounded operator も許容する定式化が二重の理由で便利である。

3 $KO^1(X,A)$

3.1 $KO^1(X,A)$ の定義と性質：前章と同様な議論が可能な部分

$KO^1(X,A)$ の定義は、前の章における $KO^0(X,A)$ の定義の各ステップにおいて、$\mathcal{H}$ 上に作用している γ の情報をすべて忘れたものによって与えられる。

Definition 23. $KO^1(X,A)$ は次で定義される。

$$KO^1(X,A) := \{(\mathcal{H},h)\}/\sim$$

- ここで $(\mathcal{H},h)$ は次の性質を満たすデータである[*30]。
  1. $\mathcal{H}$ は X 上の実 Hilbert 束。
  2. $h:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は、bounded self-adjoint Fredholm operator $h_x:\mathcal{H}_x\to\mathcal{H}_x$ $(x\in X)$ の作用素ノルムに関する連続族
  3. $x\in A$ に対して $\operatorname{Ker} h_x = 0$
- 同値関係 $\sim$ は次で定義される。$(\mathcal{H},h)\sim(\mathcal{H}',h')$ が成立するとは、$(\hat{\mathcal{H}},\hat{h})$ と $0\le t\le 1$ をパラメータとする bounded self-adjoint Fredholm operator の変形族
$$\tilde{h}_t:\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'\oplus\hat{\mathcal{H}}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'\oplus\hat{\mathcal{H}}$$
が存在し次をみたすこと：
  1. 任意の $x\in X$ に対して $\operatorname{Ker}\hat{h}_x=0$ である。
  2. $\tilde{h}_0=-h\oplus h'\oplus\hat{h}$
  3. 任意の $(x,t)\in A\times[0,1]\cup X\times\{1\}$ に対して $\operatorname{Ker}(\tilde{h}_t)_x=0$ である。

なお $\sim$ が同値関係になることは、$KO^0(X,A)$ の場合と同様に示される。

ひきもどしが KO^0 の場合と同様に定義される。すなわち、連続写像 $f:(X,A)\to(Y.B)$ が与えられたとき引き戻し写像

$$f^*:KO^1(Y,B)\to KO^1(X,A),\qquad [(\mathcal{H},h)]\mapsto[(f^*\mathcal{H},f^*h)]$$

がえられる。引き戻し写像は、以下の和を保ち、積との両立も（自明な適切な定式化に対して）成立する。

$KO^1(X,A)$ の上の和は $KO^0(X,A)$ の場合と同様に定義される。

Definition 24. $KO^1(X,A)$ の上の和を次で定義する。

$$[(\mathcal{H},h)]+[(\mathcal{H}',h')]:=[(\mathcal{H},h)\oplus(\mathcal{H}',h')]$$

[*30] 正確には $\{(\mathcal{H},h)\}$ は集合ではない。

次の積についても前章と同様に well-definedness が示される。

Definition 25. A, B をコンパクト Hausdorff 空間 X の閉部分集合とする。積

$$KO^0(X, A) \times KO^1(X, B) \to KO^1(X, A \cup B)$$

を、次によって定義する。

$$([(\mathcal{H}, h, \gamma)], [(\mathcal{H}', h')]) \mapsto [(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}', (h \otimes 1) + (\gamma \otimes h'))]$$

このとき、次は定義からただちにチェックされる。

Proposition 26. 1. $(X, A) \mapsto KO^1(X, A)$ はひきもどしに関して反変関手である。

2. $B \supset A$ であるとき、和と積により $KO^1(X, B)$ は可換環 $KO^0(X, A)$ の上の加群となる。 □

外部積も導入される。

Definition 27. (X, A) および (Y, B) が各々コンパクト Hausdorff 空間 X, Y とそれらの閉部分空間 $A \subset X$ および $B \subset Y$ からなる二つのペアであるとき、射影

$$p_X : X \times Y \to X, \qquad p_Y : X \times Y \to Y$$

による引き戻し

$$p_X^* : KO^0(X, A) \to KO^0((X, A) \times (Y, B)), \qquad p_Y^* : KO^1(Y, B) \to KO^1((X, A) \times (Y, B))$$

を経由して積をとることにより、**外部積**

$$KO^0(X, A) \times KO^1(Y, B) \to KO^1((X, A) \times (Y, B))$$

が定義される。

3.2 KO^0, KO^1 の間の懸垂同型：Bott 周期性の特別な場合

Definition 28. 次で定義される $KO^1(D^1, S^0)$ の要素 β を Bott element とよぶ。

$$\beta := [(\underline{\mathbf{R}}, x\cdot)] \in KO^1(D^1, S^0)$$

ここで $x\cdot$ は、$D^1 = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$ の座標関数 x をかける写像である。

Definition 29. $\alpha \in KO^0(X, A)$ に対して Bott element との外部積 $\alpha\beta \in KO^1((X, A) \times (D^1, S^0))$ を対応させる写像を懸垂とよぶ

外部積を具体的に表示すると次のようになる[*31]。

$$[(\mathcal{H}, h, \gamma)] \cdot \beta = [(p_X\mathcal{H}, h + x\gamma)] \in KO^1((X, A) \times (D^1, S^0))$$

次の命題は Bott 周期性定理の一部と考えられる命題である。

[*31] 右辺の表示中の $h + x\gamma$ は簡略化した記述であり、ひきもどしもこめて正確にかくなら $p_X^* h + (p_{D^1}{}^* x) p_X^* \gamma$ となる。

Theorem 30. （懸垂同型）次の懸垂写像は $KO^0(X,A)$ 加群としての同型写像である。

$$KO^0(X,A) \to KO^1((X,A)\times(D^1,S^0)), \qquad \alpha \mapsto \alpha\cdot\beta$$

ただし β は Bott element である。

この定理の一般的な形での証明はこの予稿では与えない。実際にあとで用いるのは $(X,A)=(\{*\},\emptyset)$ の場合であり、このときは、後述のように直接たしかめることができる[*32]。

3.3 $KO^1(D^1,S^0)$ とスペクトル流

X が $D^1=\{x:-1\le x\le x\}$ で A が $S^0=\{-1,+1\}$ である場合を考える[*33]。

Theorem 30 と Theorem 20 によって

$$KO^1(D^1,S^0)\cong \mathbf{Z}$$

が得られる。より正確に β が生成元である。

以下、この同型をより幾何学的にみる。

このとき、self-adjoint Fredholm operator を用いる我々の定式化において、$KO^1(D^1,S^0)$ の考察は、「self-adjoint Fredholm operator の 1 パラメータ族のスペクトル流」の考察に他ならない。

スペクトル流 $\mathrm{sf}(\mathcal{H},h)\in\mathbf{Z}$ は以下のように定義される。アウトラインのみ記す。

● STEP1

h が bounded self-adjoint Fredholm であり、D^1 がコンパクトであることから Λ_0 が存在し任意の $x\in D^1$ に対して h_x は区間 $\{\lambda:-\Lambda_0\le\lambda\le\Lambda_0\}$ の範囲には有限個の重複度有限の固有値以外のスペクトルをもたない。

● STEP2

$x=\pm1$ において h_x は 0 を固有値としてもたない。これから、有限個の点 $x_0=-1<x_1<\cdots x_n=+1$ と区間 $\{\lambda:-\Lambda_0<\lambda<\Lambda_0\}$ に属する $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ であって次の条件をみたすものが存在する。

- $\lambda_1=\lambda_n=0$
- $x_{k-1}\le x\le x_k$ をみたす任意の x に対して λ_k は h_x の固有値ではない。

[*32] しかし、あとで展開される「Dirac 作用素の Fredholm 指数をのその離散近似に対する適当な意味での指数と比較」についての議論を family version に拡張するためには、一般の (X,A) に対する命題が必要である。

[*33] D^1 が可縮であるため D^1 上の実 Hilbert 束 $\mathcal{H}$ は自明である。Kuiper の定理により、無限階数の Hilbert 空間をファイバーとする Hilbert 束は底空間がいずれであっても自明である。しかし、ここでは有限階数の場合も含めて考察している。なお D^1 上の Hilbert 束の局所自明化をはりあわせて大域的な自明化を構成することは Kuiper の定理を用いずとも容易である。自明化をひとつ固定すると、$h:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は、同一の実 Hilbert 空間上の bounded self-adjoint Fredholm operator の（作用素ノルムについて連続な）1 パラメータ族にほかならない。

● STEP3

各 $0<k<n$ に対して、sgn_k, N_k を次のように定める。

- $\lambda_k > \lambda_{k+1}$ のとき、$\mathrm{sgn}_k = +1$ とおき、h_{x_k} の $\{\lambda : \lambda_k > \lambda > \lambda_{k+1}$ に属する固有値に対応する固有空間の次元の総和を N_k とおく
- $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ のとき、$\mathrm{sgn}_k = 0, N_k = 0$ とおく。
- $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ のとき、$\mathrm{sgn}_k = -1$ とおき、h_{x_k} の $\{\lambda : \lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ に属する固有値に対応する固有空間の次元の総和を N_k とおく

● STEP4

このとき次がわかる。

Lemma 31. $\sum_{1<k<n} \mathrm{sgn}_k N_k$ の値は、$\{x_k\}$, $\{\lambda_k\}$ の取り方に依存しない □

以上の準備のもとで、

Definition 32. $\mathcal{H}$ が D^1 上の実 Hilbert 束であり、h が bounded self-adjoint Fredholm operator の連続族であるとき、

$$\mathrm{sf}(\mathcal{H}, h) = \sum_{0<k<n} \mathrm{sgn}_k N_k$$

を h のスペクトル流とよぶ。また $\alpha = [(\mathcal{H}, h)] \in K^1(D^1, S^0)$ に対して $\mathrm{sf}\,\alpha :=$ $\mathrm{sf}(\mathcal{H}, h)$ と書く。

Remark 33. h が unbounded な self-adjoint Fredholm operator であって $h/(h^2+1)^{1/2}$ が連続族であるものに対しても、スペクトル流な同様に定義される。

例えば、Bott element β に対して

$$\mathrm{sf}\,\beta = 1$$

である。実際 $x_0 = -1 < x_1 = -1/2 < x_2 = 1/2 < x_3 = +1$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2/3, \lambda_3 = 0$ とおくと $\mathrm{sgn}_1 = -1, N_1 = 0$, $\mathrm{sgn}_2 = +1, N_2 = 1$ となる。

Theorem 34. 次の同型が成立する。

$$KO^1(D^1, S^0) \cong \mathbf{Z}, \qquad [(\mathcal{H}, h)] \mapsto \mathrm{sf}(\mathcal{H}, h)$$

Proof. $\mathrm{sf}(\mathcal{H}, h) = N$ であるとき、$[(\mathcal{H}, h)] = N\beta$ を示す。アウトラインのみ記す。

● STEP 1

まず sf が $KO^1(D^1, S^0)$ 上の写像として well-defined であることを確認する。これは、h が連続的に変形するとき、$\mathrm{sf}\,h$ が保たれることに帰着する。実際、h に対して一組 $\{x_k\}$, $\{\lambda_k\}$ をえらぶと、h の微小変形に対して、同じ $\{x_k\}$, $\{\lambda_k\}$ を用いてスペクトル流が計算可能である。h の変形にともなって固有値が" 連続的に変化する" ことから、スペクトル流の変形不変性が示される。

● STEP 2

$(\mathcal{H}, h)$ があたえられたとき、h を下のように連続変形する。

スペクトル流を定義するときに用いるデータ Λ_0, $x_0 = -1 < x_1 < \cdots x_n = +1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ をとる。区分的定数関数 $\mu_0(x) = \lambda_k (x_{k-1} \le x < x_k)$ を十分よく近似する連続関数 $\mu_1(x)$ をとる。x に連続に依存する単調増加関数 $\rho_x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を、

$|x| \geq \Lambda$ に対しては $\rho_x(\lambda) = \lambda$ であり、かつ $\rho_x(\mu_1(x)) = 0$ となるようにえらぶ。このとき、連続族 $\{h_x\}$ を 1 パラメータ族として変形して連続族 $\{\rho_x(h_x)\}_x$ にすることができる。f_1 によって f_0 を十分よく近似するとき、

1. $\mathrm{Ker}\,\rho_x(h_x) \neq x$ となる x はある x_k のいくらでも近くにある。
2. x_k の近傍で、$\rho_x(h_x)$ の固有値の変化の挙動は次のようになる。$\mathrm{sgn}_k = +1$ のときマイナスからプラスに N_k 個変化し、$\mathrm{sgn}_k = -1$ のときプラスからマイナスに N_k 個変化する。$\mathrm{sgn}_k = 0$ のときには固有値はゼロになることはない。

● STEP3

この $\{\rho_x(h_x)\}$ の上の挙動と似た挙動を示す $(\mathcal{H}', h')$ として次がある。

$$(\mathcal{H}', h') := \left(\bigoplus_{0<k<n} \underline{\mathbf{R}^{N_k}}, \bigoplus_{0<k<n} \mathrm{sgn}_k (x - x_k) \cdot \right)$$

$\mathrm{sf}(\mathcal{H}, h) = N$ であるとき $[(\mathcal{H}', h')] = N\beta$ が成立する。

● STEP4

STEP3 から、あとは $(\mathcal{H}', h') \sim (\mathcal{H}, \{\rho_x(h_x)\})$ を示せば $[(\mathcal{H}, h)] = d\beta$ が得られる。そのためには、$\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}$ の上の bounded self-adjoint Fredholm operator の連続族 $\{-h'_x \oplus \rho_x(h_x)\}_{x \in D^1}$ を bounded self-adjoint Fredholm operator の連続族のまま変形して、kernel がいたるところゼロであるようにできればよい。

● STEP5

Kernel がゼロでないのは各々の $x_k \in D^1$ の近傍のみである。よって各 x_k の近傍で kernel がきえるように変形できればよい。x_k の近傍の x に対して、$\rho_x(h_x)$ の固有値であって絶対値が小さいものに対応する固有空間の直和は N_k 次元である。f_k を $\mathbf{R}^n$ からその直和へのひとつの同型とする。ただし x_k の近傍で x に連続的に依存し、計量をたもつ写像とする。f_k は、x_k の近傍でのみ定義されている。x_k から遠くなるとき、カットオフ関数をかけてゼロ写像にしてからゼロとして外に延長することにより、f_k を連続的に拡張しておく。x_k ごとに構成された f_k たちの support は D^1 の中で交わらない。これらの和を

$$f := \sum_{0<k<n} f_k : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$$

とおく。このとき $0 \leq t \leq 1$ に対して次の変形が求めるものとなっている。

$$\begin{pmatrix} -h'_x & 0 \\ 0 & \rho_x(h_x) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & f^* \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

□

3.4 KO^1 の定義において Clifford 代数の対称性を利用する方法

我々は $KO^1(X, A)$ を $(\mathcal{H}, h)$ たちの同値類として定義した。この定義を次のように言い換えることもできる。

Definition 35.

$$KO^{1,0}(X,A) := \{(\mathcal{H}, h, (\epsilon, e))\}/\sim$$

ただし

1. $\mathcal{H}$ は X 上の実 Hilbert 束。
2. $h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は bounded self-adjoint Fredholm operator の作用素ノルムに関する連続族。
3. $\epsilon, e : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は orthogonal な作用素の連続族。
4. h, ϵ, e は互いに反可換。また $\epsilon^2 = 1, e^2 = -1$.
5. $x \in A$ に対して $\operatorname{Ker} h_x = 0$

ただし、$\sim$ の定義は、$KO^0(X,A)$ の構成につかわれた $\sim$ の定義にあらわれたデータにおいて、「γ との反可換性」を「ϵ, e との反可換性」におきかえて定義したものとする。

Lemma 36. 次の自然な同型が存在する。$KO^1(X,A) \cong KO^{1,0}(X,A)$

Proof. 同型は次の写像によって与えられる。

$$KO^1(X,A) \longrightarrow KO^{1,0}(X,A), \quad [(\mathcal{H}'.h')] \mapsto [(\mathcal{H}, h, (\epsilon, e))]$$

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}' \otimes \mathbf{R}^2, \quad h := h' \otimes \begin{pmatrix} h' & \\ & -h' \end{pmatrix}, \quad \epsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

実際次の写像が逆をあたえる。

$$KO^1(X,A) \longleftarrow KO^{1,0}(X,A), \quad [(\mathcal{H}'.h')] \leftarrow [(\mathcal{H}, h, (\epsilon, e))]$$

$$\mathcal{H}' := \ Ker(\epsilon e - 1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}), \quad h := h'|_{\mathcal{H}'},$$

□

同様に、$KO^0(X,A)$ の定義も次のように言い換えることができる。

Definition 37.

$$KO^{1,1}(X,A) := \{(\mathcal{H}, h, (\epsilon_0, \epsilon_1, e_1))\}/\sim$$

ただし

1. $\mathcal{H}$ は X 上の実 Hilbert 束。
2. $h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は bounded self-adjoint Fredholm operator の作用素ノルムに関する連続族。
3. $\epsilon_0, \epsilon_1, e_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は orthogonal な作用素の連続族。
4. $h, \epsilon_0, \epsilon_1, e_1$ は互いに反可換。また $\epsilon_0^2 = \epsilon_1^2 = 1, e_1^2 = -1$.
5. $x \in A$ に対して $\operatorname{Ker} h_x = 0$

Lemma 38. 次の自然な同型が存在する。$KO^{1,1}(X,A) \cong KO^0(X,A)$ □

Remark 39. （一般の整数 degree i に対する $KO^i(X,A)$ の定義）
同様に整数 $p \geq 0, q \geq -1$ に対して

$$KO^{p,q}(X,A) := \{(\mathcal{H}, h, (\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_q, e_1, \ldots, e_p))\}/\sim$$

を定義することができ、同様に同型

$$KO^{p,q}(X,A) \cong KO^{p+1,q+1}(X,A)$$

が構成される。これから、次の定義が可能である。

$$KO^i(X,Y) := KO^{p,q}(X,Y) \qquad (i = p-q)$$

4 トーラス上の Dirac 方程式の正方格子による近似

4.1 やりたいこと

この予稿の以下の章では特定のふたつの作用素の指数を比較する。

以下の章の目標を述べる。

$T = T^n$ を n 次元のトーラス $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ とする。Riemann 計量は標準的なものを考える。最初に T 上の (ねじれた実ベクトル束 E の切断に作用する)Dirac 作用素 D_{T^n} が与えられたとする。E 上に γ の作用があり $\gamma^2 = 1$ かつ D_{T^n} が γ と反可換であるときには、D_{T^n} の指数（Fredholm 指数）が

$$\mathrm{index} := \mathrm{trace}\,\gamma|_{\mathrm{Ker}\,D_{T^n}} \in \mathbf{Z}$$

として定義される[*34]。これはこれまでの準備を用いれば

$$[(L^2(E), D, \gamma)] \in KO^0(\{*\}, \emptyset) \cong \mathbf{Z}$$

に他ならない。あるいはスペクトル流を用いれば

$$[(p^*(L^2(E)), D + m\gamma)]] \in KO^1(D^1, S^0) \cong \mathbf{Z}$$

と書き換えることができた[*35]。

N を整数として $a = 1/N$ を格子間隔とする正方格子によって T を近似したものを T^n_a とする。格子上の D_{T^n} の（ナイーブな）近似 D_a がを定義することができる。

格子近似の指数を定義し、それが a が十分小さいときに連続極限 D_{T^n} の指数と一致することを示したい。

1. D_a のままでは指数をナイーブに定義すると常にゼロになる。

[*34] D_{T^n} は unbounded である。
[*35] m は $D^1 = [-m_0, m_0](m_0 > 0)$ の座標をあらわすパラメータである。

2. D_a に、「Wilson 項 W」を導入すると、指数をうまく定義することが可能である：　$D_{W,a} := D_a + \gamma W$
3. そのためのひとつの方法は、スペクトル流を用いることである。すなわち次の１パラメータ族を考える。

$$D_{W,a} + m\gamma$$

最終的な目標は Theorem 51 である。

4.2 Notations

記号と設定を準備する。

N 正の整数

$a = 1/N$.

$T_a^n := (a\mathbf{Z})^n/\mathbf{Z}^n (\subset T^n)$

E_a $\mathbf{Z}/2$-graded Clifford module bundle over T_a^n

すなわち、計量のはいった実ベクトル束であり、下のデータ γ, $c_i(i = 1, \ldots, n)$ が付与されたもの。

$\gamma : E_a \to E_a$: $\mathbf{Z}/2$-grading をあらわす self-adjoint orthogonal operator

$\gamma^2 = 1$

$c_i : E_a \to E_a$ $(i = 1, \ldots n)$ Clifford 作用をあらわす skew-adjoint orthogonal operator

$c_i^2 = -1$

ただし、$\{\gamma, c_i\} = 0, \{c_i, c_j\} = 0\, (i \neq j)$

$s_i : T_a^n \to T_a^n$ i-成分の $-a$ シフト

$(x_1, \ldots, x_n)^T \to (x_1, \ldots, x_i - a, \ldots, x_n)^T$

$U_i : E_a \to E_a$ s_i のリフトであり、計量と c_i 作用、γ 作用を保つもの。

次の写像を考える。

$$\nabla_i := \frac{U_i - 1}{a} : \Gamma(E_a) \to \Gamma(E_a)$$

これの adjoint は

$$\nabla_i^* = \frac{U_i^{-1} - 1}{a} : \Gamma(E_a) \to \Gamma(E_a)$$

∇_i, ∇_i^* も γ および c_j たちと可換である。

微分作用素 d/dx_i の離散近似として二つの差分作用素を

$$\nabla_i^f := \frac{U_i - 1}{a}, \quad \nabla_i^b := \frac{1 - U_i}{a}$$

によって定義すると、

$$\nabla_i^f = \nabla_i, \quad \nabla^b := -\nabla_i^*$$

である。

5 Wilson-Dirac 作用素に対するアプリオリ評価（Garding's inequality）

5.1 Dirac 作用素と Wilson 項

差分作用素 ∇_i^f, ∇_i^b は、微分作用素 d/dx_i の離散化であるが d/dx_i が skew-adjoint であるのに対して、それの離散化である差分作用素 ∇_i^f, ∇_i^b は、いずれも skew-adjoint ではない。両者の平均は skew-adjoint である。この平均をもちいると、self-adjoint operator D が次のように定義できる[*36]。

$$D := \sum_i D_i, \quad D_i := c_i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2}$$

すなわち $D_i = c_i(\nabla_i - \nabla_i^*)/2$ である。

この D は Dirac operator の self-adjoint な離散化である。

また、ふたつの差分作用素 ∇_i^f, ∇_i^b の差を W_i とおき、それらの和を W とおく。

$$W := \sum_i W_i, \quad W_i := \frac{-\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2}$$

すなわち $W_i = -(\nabla_i + \nabla_i^*)/2$ である。

これがもつ基本的な性質は次の Lemma によって与えられる。

Lemma 40.

$$\nabla_i^* \nabla_i = \nabla_i \nabla_i^* = \frac{1}{a^2}(1 - U_i - U_i^{-1} + 1) = -\frac{1}{a}(\nabla_i + \nabla_i^*)$$

とくに

$$W_i = \frac{a}{2} \nabla_i^* \nabla_i$$

であり、W_i は semi-positive. よってその和 $W = \sum_i W_i$ も semi-positive.

Definition 41. 次の self-adjoint operator を hermitian Wilson-Dirac operator という

$$D_W := D + \gamma W$$

5.2 アプリオリ評価

D_W の二乗を次のように和に分割する。

$$D_W^2 = \sum_i (D_i^2 + W_i^2) + R_{DD} + R_{WD} + R_{WW}$$

[*36] この章では D は格子上の作用素をさす。あとの章では D をトーラス上の微分作用素としての本来の Dirac 作用素の記号として用いる。（混乱すみません。）

ここで

$$R_{DD} = \sum_{i<j} \{D_i, D_j\}, \quad R_{WD} = \sum_{i,j} [W_i, D_j], \quad R_{WW} = \sum_{i \neq j} W_i W_j$$

簡明なのは任意の $i, .j$ に対して U_i, U_j とが可換であるとき、(すなわち U_i たちが「平坦」である場合）である。このときは $R_{DD} = R_{WD} = 0$ であり、また W_i と W_j は可換でありその積も semi-positive となり、それらの和である R_{WW} も semi-positive な作用素となる。この場合、self-adjoint operator として不等式

$$D_W^2 \geq \sum_i W_i^2 = \sum_i (\nabla_i^f - \nabla_i^b)^2$$

が成立する。すなわち、

$$||D_W \phi||^2 \geq \sum ||\nabla_i^f \phi - \nabla_i^b \phi||^2$$

これは、左辺が抑えられているような ϕ に対して、ふたつの差分作用素 ∇_i^f, ∇_i^b の作用の効果は (L^2 ノルムに関する限り）近いことを意味している。

「平坦」でない一般の場合にも、近似的に上と類似の評価が成立することを示すことが当面の目標である。

(1) 次の項のは平坦であるか否かによらない。

$$D_i^2 + W_i^2 = -\Big\{\frac{\nabla_i - \nabla_i^*}{2}\Big\}^2 + \Big\{\frac{\nabla_i + \nabla_i^*}{2}\Big\}^2 = \frac{1}{2}(\nabla_i \nabla_i^* + \nabla_i^* \nabla_i)$$

(2) $i < j$ に対して

$$\{D_i, D_j\} = \frac{c_i c_j}{4}[(\nabla_i - \nabla_i^*, \nabla_j - \nabla_j^*]$$

(3) i, j に対して

$$[W_i, D_j] = -\frac{1}{4}[\nabla_i + \nabla_i^*, \nabla_j - \nabla_j^*]$$

(4) $i \neq j$ に対して

$$\begin{aligned} W_i W_j &= \frac{a}{2}\nabla_i^* \nabla_i \frac{1}{2}(-\nabla_j - \nabla_j^*) \\ &= \frac{a}{2}\nabla_i^*[\nabla_i, \frac{1}{2}(-\nabla_j - \nabla_j^*)] + \frac{a}{2}\nabla_i^* \frac{1}{2}(-\nabla_j - \nabla_j^*)\nabla_i \\ &= -\frac{a}{4}R_{ij} + \frac{a^2}{4}\nabla_i^* \nabla_j^* \nabla_j \nabla_i \end{aligned}$$

ただし

$$R_{ij} := \nabla_i^*([\nabla_i, \nabla_j] + [\nabla_i, \nabla_j^*])$$

なお上の最後の変形で $\nabla_j + \nabla_j^* = -(a/2)\nabla_j^* \nabla_j$ をもちいた。

上の変形で (1) はそのままの形で後で用いる。(2)(3) は平坦な場合には消える交換子の和として表示された。(4) の変形後の式のはじめの項 R_{ij} は平坦な場合には消える交換子の差分であり、つぎの項は semi-positive である。

以下では次の評価が成立することは認めてもちいる。

Lemma 42. ある定数 $C_0 > 0$ による、作用素ノルムの次の評価がある。任意の I, J に対して

$$||[\nabla_i, \nabla_j]||, ||[\nabla_i, \nabla_j^*]||, ||[\nabla_i^*, \nabla_j^*]|| \le C_0$$

このとき、(2)(3)(4) から次が従う。

Corollary 43. 任意の $v \in \Gamma(E_a)$ に対して

$$|\langle v|\{D_i, D_j\}|v\rangle| \le C_0||v||^2 \quad (i < j)$$
$$|\langle v|[W_i, D_j]|v\rangle| \le C_0||v||^2$$
$$|\langle v|R_{ij}|v\rangle| \le 2C_0||\nabla_i v||||v|| \quad (i \ne j)$$

はじめのふたつは (2)(3) から直ちに従う。最後の不等式では (4) とともに「部分積分」をもちいた。

ここまでの計算をまとめる

Lemma 44. 次のように変形できる。

$$D_W^2 = \frac{1}{2}\sum_i(\nabla_i^*\nabla_i + \nabla_i\nabla_i^*) + \frac{a^2}{4}(\nabla_i\nabla_j)^*(\nabla_i\nabla_j) + \tilde{R}$$

ただし、$\tilde{R}$ は次の評価をみたす：n, C_0 のみからきまるある $a_0 > 0$ および $C > 0$ が存在し、任意の $0 < a < a_0$ に対して

$$\langle v|\tilde{R}|v\rangle \le \frac{1}{2}\Big(\sum_i ||\nabla_i v||^2 + C||v||^2\Big)$$

Proof. $\tilde{R} = R_{DD} + R_{WD} - (a/2)\sum_{i\ne j} R_{ij}$ であるから、上で行った計算をまとめると次のようになる。

$$\langle v|\tilde{R}|v\rangle \le \frac{n(n-1)}{2}C_0||v||^2 + n^2C_0||v||^2 + \frac{na}{2}C_0\sum_i ||\nabla_i v||||v||$$

最後の項の積を $||\nabla_i||||v|| \le ||\nabla_i v||^2 + ||v||^2$ によって変形すればよい。 □

Theorem 45. （Wilson-Dirac 作用素に対するアプリオリ評価 （Garding's inequality)） ∇_i たちと ∇_i^* たちの交換子に対する評価の設定において、Lemma 44 の a_0, C に対して次が成立する：$0 < a < a_0$ であるとき任意の $v \in \Gamma(E_a)$ に対して

$$\sum_i ||\nabla_i v||^2 \le 2||D_W v||^2 + C||v||^2$$

Proof. Lemma 44 の記号をもちると、

$$||D_W v||^2 = \frac{1}{2}\sum_i(||\nabla_i v||^2 + ||\nabla_i^* v||^2) + \frac{a^2}{4}||\nabla_i\nabla_j v||^2 + \langle v|\tilde{R}|v\rangle$$

$\nabla_i^* = -U_i^*\nabla_i$ より $||\nabla_i^* v|| = ||\nabla_i v||$ であることとここで右辺の第二項が非負であることから

$$||D_W v||^2 \ge \sum_i ||\nabla_i v||^2 - |\langle v|\tilde{R}|v\rangle|$$

ここで Lemma 44 の評価をもちいれば

$$||D_W v||^2 \leq \sum_i ||\nabla_i v||^2 - \frac{1}{2}\big(\sum_i ||\nabla_i v||^2 + C||v||^2\big)$$

□

6　指数の比較

6.1　設定

■連続的なデータ　連続的なデータが次のように最初に与えられたものとする。

・$T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$

・$E \to T^n$ 滑らかな実ベクトル束であり、計量があり、c_i と γ の作用が付与されたもの。

・E 上の滑らかな接続であって、平行移動がこれらの構造をたもつものが固定されていると仮定する。

次に Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を導入する。

E の滑らかな切断 u, v に対して、E の内積 $(*, *)$ と T^n の標準的計量をもちいて

$$\langle u|v\rangle := \int_{T^n} (u, v) d\mathrm{vol}, \quad ||v||_{L^2} := \langle v|v\rangle^{1/2}$$

と定義する。

・E の滑らかな切断たちのノルム $||*||_{L^2}$ による完備化を

$$\mathcal{H} := L^2(E)$$

とかく。無限次元の実 Hilbert 空間である[*37]。

次に L^2_1 ノルムを定義する。いくつかの実質的に同等な方法があるが[*38]、ここでは次の素朴な方法をとる。

[*37] $\mathcal{H}$ の要素たちは、「L^2 ノルムが有界な関数全体を「ほとんどいたるところ一致しているとき同値」と定義したときの同値類たち」とぴったり対応している。この対応は次のように与えられる： 完備化 $\mathcal{H}$ の要素に対して、その代表元をひとつとる。すなわち、$u_1, u_2, u_3, \ldots$ が滑らかな切断からなる列であって、L^2 ノルムについて Cauchy 列であったとする。このとき、適当な部分列をとると、「ほとんどいたるところ」収束する。すなわち、収束しない点全体のなす集合は「測度ゼロ」である。そしてその極限は L^2 ノルムが有界な可測関数となる。ふたとおりの部分列をとると極限は、ほとんどいたるところ一致する。逆に L^2 ノルムが有界な可測関数に対して、上のような列 $u_1, u_2, u_3, \ldots$ が存在する。別の列 $v_1, v_2, v_3, \ldots$ をとると、両者があらわす完備化の要素は一致している。すなわち、両者を交互にならべた $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \ldots$ はやはり Cauchy 列となる。

[*38] 他の可能性として、接続を固定し局所的な平行移動を用いる方法も可能である。また、E を自明なベクトル束に埋め込みそこで微分を用いる方法も可能である。

・まず有限開被覆 $T^n = \cup_\alpha U_\alpha$ であって、次の性質をもつものをひとつ固定する：各 U_α の閉包を含むある開集合 U'_α の上で、制限 $E|_{U'_\alpha}$ が（滑らかなベクトル束として）自明である。この（滑らかなベクトル束としての）自明化も一組固定する。

・E の滑らかな切断 v に対して、各 U'_α の上では、その上に固定された E の自明化を用いることによって v の i 成分方向の微分が定義される。この微分は α に依存するので、$\partial_{i,\alpha} v$ と書くことにする。

$$||v||_{L_1^2} := \left(||v||_{L^2}^2 + \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \int_{U_\alpha} |\partial_{i,\alpha} v|^2\right)^{1/2}$$

滑らかな切断 v に対しては $||v||_{L_1^2}$ は有限の値として定義されるが、$\mathcal{H}$ の要素であって滑らかではないものの中には、$||v||_{L_1^2}$ が有限の値として定義されないものも存在する[*39]。

・E の滑らかな切断たちのノルム $||*||_{L_1^2}$ による完備化を

$$L_1^2(E)$$

とかく。自然な単射

$$L_1^2(E) \to \mathcal{H} = L^2(E)$$

が存在する。

Definition 46. トーラス T^n の上の Dirac 作用素は次で与えられる[*40]。

$$D : L_1^2(E) \to \mathcal{H}, \qquad Dv = \sum c_i \nabla_{i,cont} v$$

■離散的なデータ　次に、上を用いて、各 $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して、離散的なデータを次のように定める。

・$a = \frac{1}{N}$

・$T_a^n = a\mathbf{Z}^n/\mathbf{Z}^n$

・$E_a := E|_{T_a^n}$

・E_a の上には" 離散的接続" U_i $(i = 1, \ldots, n)$ を次のように与える：$\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ の i 番目の座標軸の方向に E 上に固定されている Cl 接続によって平行移動を長さ a の負の方向の平行移動によって U_i を定める。

---

*39 正確には次の事実が成立する。$u_1, u_2, u_3, \ldots$ が滑らかな切断からなる列であって、L^2 ノルムについて Cauchy 列であったとする。このとき、次の問いは、Yes であることも No であることもある。問：滑らかな切断からなる同様の列 $v_1, v_2, v_3, \ldots$ であって、L_1^2 ノルムに関して Cauchy 列であり、かつ、両者を交互にならべた $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \ldots$ が L^2 ノルムに関して Cauchy 列であるものが存在するか。存在する場合、部分列の極限は、ほとんどいたるところ（あらゆる方向に）１回微分可能であり、１回微分したものは L^2 ノルムが有限であることが知られている。

*40 ここでは D はトーラス上の微分作用素である。前の章では記号 D は格子上の作用素の記号であったので注意のこと。この章では格子上の作用素の記号としては Wilson 項つきの作用素に対して $D_{W,a}$ が使われる。（混乱すみません。）

・$\mathcal{H}_a := L^2(E_a)$ ただし、L^2 ノルムは、次で定義する。

$$||v||_{L^2} := \Big(\frac{1}{\# T_a^n}\sum_{x\in T_a^n}|v_x|\Big)^{1/2}$$

■連続と離散をつなぐ写像 連続的なデータから得られる無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と、離散的なデータから得られる有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_a$ の間に、線形写像 $f_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}$ を次のやり方で定義する。

・N_0 を十分大きく取り、T^n 内にある一辺の長さ $2/N_0$ の任意の立方体はかならずある α に対する U_α に（境界も含めて）含まれるものとする。

・$N > N_0$ に対して $a = 1/N$ を考える。

・同型 $\mathcal{H}_a = \oplus_{x\in T_a^n} E_x$ があるので、$f_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}$ の定義のためには、各 $x = (x_i)_{i=1}^n \in T_a^n$ ごとに線形写像

$$f_{a,x} : (E_a)_x \to \mathcal{H}$$

を定めればよい。

・各 $x = (x_i)_{i=1}^n \in T_a^n$ ごとに、x を中心とする立方体 $\prod_{i=1}^n [x_i - a, x_i + a]$ を含む開集合を開被覆 $\{U_\alpha\}$ の中から ひとつ選び、U_{α_x} とおく[*41]。$E|_{U_{\alpha_x}}$ の自明化を用いて、E_x の要素を自明化における定数切断に拡張することができる。この拡張を表す写像を

$$\mathrm{ext}_x : E_x \to \Gamma(E|_{U_{\alpha_x}})$$

とおく。

・各 $x = (x_i)_{i=1}^n \in T_a^n$ ごとに、関数 $\rho_x : T^n \to \mathbf{R}$ を次で定める[*42]。

$$\rho_x(y) = \prod_{i=1}^n \max\{1 - |y_i - x_i|/a, 0\}$$

このとき、次に注意する。

Lemma 47.

$$\sum_{x\in T_a^n}\rho_x = 1$$

実際、左辺の $y = (y_i)_{i=1}^n$ における値は $\prod_{i=1}^n(\sum_{x_i\in a\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}\max\{1-|y_i-x_i|/a, 0\})$ に等しく、積をとる各項は $z\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ 上の関数として定数関数 1 である。

・$f_{a,x} : E_x \to \mathcal{H}$ は、ext_x に関数 ρ_x をかけ、立方体の外ではゼロに延長することによって定義する。すなわち、立方体の上では

$$f_{a,x} := \rho_x \mathrm{ext}_x$$

[*41] ここで $[x_i - a, x_i + a]$ とは、$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の中で x_i との距離が a 以下の点全体である。

[*42] ここで $|y_i - x_i|$ とは、$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の中での y_i と x_i との距離である。

Definition 48.

$$f_a := \sum_{x \in T_a^n} f_{a,x} : \mathcal{H}_a = \bigoplus_{x \in T_a^n} E_x \to \mathcal{H}$$

このとき、離散的な Dirac 作用素

$$D_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a$$

および Wilson term

$$W_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a$$

が定義されていた。

$$D_{a,W} := D_a + \gamma W_a.$$

6.2 使う性質

f_a, f_a^* についての次の性質 (# 1)(# 2)(# 3) および $D_{W,a}, D$ についての次の性質 ($\star$ 1)($\star$ 2) を後で用いる。($\star$ 2) は、Theorem 45 からしたがう[*43]。それ以外の性質は構成の仕方から直接計算によって示される。この予稿では、これらの証明の細部は与えないかわりに、簡明な設定のもとで、これらの性質を示すための鍵となる命題を、Appendix の Proposition 60 において証明付きで与える。

■f_a の性質　次の 3 つの性質が成立する。

(# 1) f_a, f_a^* の有界性

$k = 0, 1$ のいずれに対しても $f_a : L_k^2(E_a) \to L_k^2(E)$ の作用素ノルムは a について一様に有界。同様に、$k = 0, 1$ のいずれに対しても $f_a^* : L_k^2(E) \to L_k^2(E_a)$ の作用素ノルムは a について一様に有界

(# 2) $f_a^* f_a$ は a が小さいとき id にいくらでも近い。

a によらない $C > 0$ が存在し、任意の a と任意の $v_a \in \mathcal{H}_a$ に対して

$$||f_a^* f_a v_a - v_a||_{L^2}^2 \le Ca||v_a||_{L_1^2}^2$$

(# 3) $f_a f_a^* \to id$ の弱い意味での収束

各々の $\beta \in C^\infty(E) \subset \mathcal{H}$ に対して、 $a \to 0$ のとき、

$$f_a f_a^* \beta \longrightarrow \beta \quad (L^2\text{弱収束})$$

すなわち、任意の $\beta, \beta' \in C^\infty(E) \subset \mathcal{H}$ に対して、$a \to 0$ のとき

$$\langle f_a^* \beta' | f_a^* \beta \rangle \to \langle \beta' | \beta \rangle$$

[*43] Theorem 45 は、a が十分小さいときに示された。それが適用されない $a = 1/N$ の可能性は有限個である。有限個の a に対して ($\star$ 2) の不等式は、C を十分大きくとるとき成立する（$\mathcal{H}_a$ が有限次元であるから）。よって、任意の a に対して求める不等式は成立する。

■$D_{W,a}$ **の性質**　次の２つの性質が成立する。

(⋆ 1) $D_{W,a}$ が弱い意味で D に収束

各々の $\beta \in C^\infty(E) \subset \mathcal{H}$ に対して、 $a \to 0$ のとき、

$$f_a D_{W,a}^* f_a^* \beta \longrightarrow D^* \beta \quad (L^2\text{弱収束})$$

すなわち、任意の $\beta, \beta' \in C^\infty(E)$ に対して、$a \to 0$ のとき

$$\langle f_a^* \beta' | D_{W,a}^* | f_a^* \beta \rangle \to \langle \beta' | \beta \rangle$$

(⋆ 2) アプリオリ評価（Garding's inequality）の離散版

a によらない $C > 0$ が存在し、任意の a と $\phi \in \mathcal{H}_a$ に対して

$$||\nabla_a \phi||_{L^2}^2 \leq C(||D_{W,a}\phi||_{L^2}^2 + ||\phi||_{L^2}^2)$$

ただし

$$\nabla_a \phi = (\nabla_{i,a}\phi)_{i=0}^n, \qquad ||\nabla_a \phi||_{L^2}^2 := \sum_{i=1}^n ||\nabla_{i,a}\phi||_{L^2}^2$$

6.3　目標

$m_0 > 0$ を固定し、

$$X := [-m_0, m_0], \qquad A := \{-m_0, m_0\}$$

とおく。すなわち原点を内部に含む閉区間 X の境界が A である。

$m \in X$ をパラメータとして

$$D^m := D + m\gamma, \qquad D_{W,a}^m := D_{W,a} + m\gamma$$

を考える。ただし、各々の定義域は次のように設定する。

$$D^{\cdot} L_1^2(E) \to \mathcal{H}, \qquad D_{W,a}^m : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a$$

Lemma 49. Dirac 作用素 D の摂動 D^m に対して次が成立する。

・$m \in X = [-m_0, m_0]$ に対して D^m は Fredholm

・$m \in A = \{-m_0, m_0\}$ に対して $\operatorname{Ker} D^m = 0$[*44]

*44 $\operatorname{Ker} D^m$ を、なめらかな解の全体として定義する。一般論から D_m の「弱い意味での解」はなめらかである。ただし、「弱い意味での解」とは、可測な切断 ϕ であって、任意のなめらかな切断 β に対して $\langle (D^m)^* \beta | \phi \rangle = 0$ を満たすもの。ただし、$(D_m)^*$ は D_m の「形式的随伴」である。今の場合、第一に、$(D_m)^* = D_m$ であり、またこの一般論からなめらかな解の全体は、「弱い意味の解」の全体と一致する。

Proof. 任意の $m \in \mathbf{R}$ に対して D^m が Fredholm であることは一般論からしたがう。

$\mathrm{Ker}\, D_m$ の要素 ϕ をとると、D と γ は反可換である。($\{c_i, \gamma\} = 0$ であるため。)よって $D_m^2 = D^2 + (\gamma m)^2 = D^2 + m^2$ である。これから $\mathrm{Ker}\, D_m$ の要素 ϕ をとると、

$$0 = \langle \phi | D_m^2 | \phi \rangle = \langle \phi | D^2 + m^2 | \phi \rangle = ||D\phi||_{L^2}^2 + m^2 ||\phi||_{L^2}^2.$$

右辺の各項は非負であるからとくに $m^2 ||\phi||_{L^2} = 0$. よって $m \in A$ であれば $m \neq 0$ であるから $\phi = 0$ を得る。 □

目標は次である。

Theorem 50. ある $a_0 > 0$ が存在し、$0 < a < a_0$ となる任意の $a = 1/N$ に対して次が成立する。

- 任意の $m \in X = [-m_0, m_0]$ に対して $\mathcal{H}_a \oplus L_1^2(E)$ の上の次の作用素の kernel はゼロ

$$\begin{pmatrix} -D_{W,a}^m & f_a^* \\ f_a & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{W,a} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f_a^* \\ f_a & 0 \end{pmatrix}$$

- 任意の $m \in A = \{-m_0, m_0\}$ と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して $\mathcal{H}_a \oplus L_1^2(E)$ の上の次の作用素の kernel はゼロ

$$\begin{pmatrix} -D_{W,a}^m & t f_a^* \\ t f_a & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{W,a} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & f_a^* \\ f_a & 0 \end{pmatrix}$$

これから次が従う[*45]。

Theorem 51. (Dirac 作用素の格子近似の指数の連続極限)十分小さい $a = 1/N$ に対して次の一致が成立する。

$$[(p^*\mathcal{H}, D + m\gamma)] = [(p^*\mathcal{H}_a, D_{W,a} + m\gamma)] \in KO^1(D^1, S^0)$$

なお、懸垂同型によって

$$KO^0(\{*\}, \emptyset) \cong KO^1(D^1, S^0), \quad [(p^*\mathcal{H}, D + m\gamma)] \leftrightarrow [(\mathcal{H}, D, \gamma)]$$

に注意する。等式の右辺が、「Dirac 作用素の格子近似の指数」と考えるべきものである。

6.4 背理法の仮定

仮に目標の Theorem 50 が不成立だとする。このとき、$i = 1, 2, \ldots$ を添え字とする次のような列が存在する。

[*45] なお、D は unbounded operator である。Bounded operator に対する記述とするためには、D を $D/(D^1 + 1)^{1/2}$ に置き換える.

・ $a_i = 1/N_i \to 0$
・ $(m_i, t_i) \in \{(m,t) : m \in X, t = 1\} \cup \{(m,t) : m \in A, 0 \le t \le 1\}$
・ $(v_{a_i}, w_{a_i}) \in \mathcal{H}_{a_i} \oplus L^2_1(E)$[*46]
ただし、これらは次をみたす。

1.
$$||v_{a_i}||^2_{L^2} + ||w_{a_i}||^2_{L^2} = 1$$

2.
$$\begin{pmatrix} -D^{m_i}_{W,a_i} & t_i f^*_{a_i} \\ t_i f_{a_i} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{a_i} \\ w_{a_i} \end{pmatrix} = 0$$

・部分列をとることにより、一般性を失わずに (m_i, t_i) はある (m_∞, t_∞) に収束すると仮定してよい。

$$m_i \to m_\infty, \qquad a_i \to a_\infty$$

このとき $(m_\infty, t_\infty) \neq (0,0)$ である。

・$(\# \ 1)(\star \ 2)$ から $f_{a_i} v_{a_i}, w_{a_i} \in \mathcal{H}$ は一様に L^2_1 有界である。よって部分列をとることにより、一般性を失わずに $f_{a_i} v_{a_i}$ はある $v_\infty \in \mathcal{H}$ に L^2_1 弱収束し、w_{a_i} はある $w_\infty \in \mathcal{H}$ に L^2_1 弱収束すると仮定してよい[*47]。なお、Rellich の定理から、L^2 弱収束列は、L^2 強収束列である。

以下これらの列についてこれらの収束性、弱収束性を仮定する。

6.5 方程式の弱極限

以下、上の背理法の仮定の設定をもちいる。

Lemma 52. 上の背理法の仮定の下で次の成立が帰結される。

$$\begin{pmatrix} -D^{m_\infty} & t_\infty \\ t_\infty & D^{m_\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} = 0$$

Proof. 示すべきは次の 2 式である。

$$\begin{cases} -D^{m_\infty} v_\infty & + t_\infty w_\infty & = & 0 \\ t_\infty v_\infty & + D^{m_\infty} w_\infty & = & 0 \end{cases}$$

一方背理法の仮定から次が成立していた。

$$\begin{cases} -D^{m_i} v_{a_i} & + t_i f^*_{a_i} w_{a_i} & = & 0 \\ t_i f_{a_i} v_{a_i} & + D^{m_i} w_{a_i} & = & 0 \end{cases}$$

下の第二式の両辺の L^2 弱収束先の極限をみると示すべき 2 式のひとつを得る。

また第一式に f_{a_i} をほどこすと $\mathcal{H}$ の中の次の式を得る。

$$-f_{a_i} D^{m_i} v_{a_i} + t_i f_{a_i} f^*_{a_i} w_{a_i} = 0$$

[*46] Regularity の一般論によって w_{a_i} は $L^2_1(E)$ の要素となる。
[*47] Hilbert 空間の有界な点列には部分列であって弱収束するものが存在する。

左辺が $-D^{m_\infty}v_\infty - t_\infty w_\infty$ に L^2 弱収束することを示せば示すべき 2 式のもう一方が得られる。

まず第 2 項が $-t_\infty w_\infty$ に L^2 弱収束することが次のようにわかる。

実際、任意の $\beta \in C^\infty(E)$ に対して

$$\langle \beta | t_i f_{a_i} f_{a_i}^* w_{a_i} \rangle = t_i \langle f_{a_i} f_{a_i}^* \beta | w_{a_i} \rangle$$

である。ここで $t_i \to t_\infty$ および $f_{a_i} f_{a_i}^* \beta \to \beta$ (L^2 弱収束。 (# 3) による) および $w_{a_i} \to w_\infty$ (L^2 強収束) によって、これは $\langle \beta | t_\infty w_\infty \rangle$ に収束する。

証明が残されているのは、第 1 項が $-D^{m_\infty} v_\infty$ に L^2 弱収束することだけである。

すなわち任意の $\beta \in C^\infty(E)$ に対して次の収束を示したい。

$$\langle \beta | f_{a_i} D^{m_i} v_{a_i} \rangle \to \langle \beta | D^{m_\infty} v_\infty \rangle$$

ここで

$$\langle \beta | f_{a_i} D^{m_i} v_{a_i} \rangle = \langle (D^{m_i})^* f_{a_i}^* \beta | v_{a_i} \rangle$$

であり、

・$(D^{m_i})^* f_{a_i}^* \beta$ は (# 1) から L^2 ノルムが一様に有界

・v_{a_i} は L^2 ノルムが一様に有界

よってこの内積の値と次の内積の値との差は（# 2) によって）$a_i \to 0$ のとき 0 に収束する。

$$\langle (D^{m_i})^* f_{a_i}^* \beta | f_{a_i}^* f_{a_i} v_{a_i} \rangle = \langle f_{a_i} (D^{m_i})^* f_{a_i}^* \beta | f_{a_i} v_{a_i} \rangle$$

ここで

・$f_{a_i} (D^{m_i})^* f_{a_i}^* \beta \to (D^m)^* \beta$ は L^2 弱収束する (($\star$ 1) による）

・$f_{a_i} v_{a_i} \to v_\infty$ は L^2 強収束

よって上の内積は次に収束し、これが求めることであった。

$$\langle (D^m)^* \beta | v_\infty \rangle = \langle \beta | D^m v_\infty \rangle$$

□

6.6 ノルムの極限

Lemma 53. 上の背理法の仮定の下で次の成立が帰結される。

$$||v_\infty||_{L^2}^2 + ||w_\infty||_{L^2}^2 = 1$$

Proof. 背理法の仮定から次が成立している。

$$||v_{a_i}||_{L^2}^2 + ||w_{a_i}||_{L^2}^2 = 1$$

この式の極限として求める式が得られることを示す。

まず、$w_{a_i} \to w_\infty$ (L^2 強収束) より $||w_{a_i}||_{L^2}^2 \to ||w_\infty||_{L^2}^2$ が成立する。

次に、第一に $f_{a_i}v_{a_i}$ は一様に L_1^2 有界なので、(# 2) から

$$||\,||f_{a_i}v_{a_i}||_{L^2}^2 - ||v_{a_i}||_{L^2}^2| \to 0$$

であり、第二に $f_{a_i}v_{a_i} \to v_\infty$ が L^2 強収束であるから

$$||f_{a_i}v_{a_i}||_{L^2}^2 \to ||v_\infty||^2.$$

が成立する。両者から $||v_{a_i}||_{L^2}^2 \to ||v_\infty||_{L^2}^2$ が成立する。 □

6.7 証明の最後のステップ

背理法の仮定から矛盾が得られることを示す。

Lemma 52 から $(v_\infty, w_\infty)^T$ は $L_1^2(E) \otimes \mathbf{R}^2$ 上の次の作用素の kernel の要素である。

$$\begin{pmatrix} -D^{m_\infty} & -t_\infty \\ t_\infty & D^{m_\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_\infty\gamma & 0 \\ 0 & m_\infty\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t_\infty \\ t_\infty & 0 \end{pmatrix}$$

右辺の 3 項はすべて互いに反可換である。

$(v_\infty, w_\infty)^T$ は一般論から $C^\infty(E) \otimes \mathbf{R}^2$ に属する[*48]。 よって上の作用素の自乗を作用させることができ、その値はゼロになるはずである。上の作用素の自乗は項の間の反可換性から

$$\begin{pmatrix} -D^{m_\infty} & -t_\infty \\ t_\infty & D^{m_\infty} \end{pmatrix}^2 = D^2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m_\infty^2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t_\infty^2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これから

$$\begin{aligned} 0 &= (v_\infty, w_\infty) \begin{pmatrix} -D^{m_\infty} & -t_\infty \\ t_\infty & D^{m_\infty} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} \\ &= ||Dv_\infty||_{L^2}^2 + ||Dw_\infty||_{L^2}^2 + (m_\infty^2 + t_\infty^2)(||v_\infty||_{L^2}^2 + ||w_\infty||_{L^2}^2) \end{aligned}$$

ここで Lemma 53 から $||v_\infty||_{L^2}^2 + ||w_\infty||_{L^2}^2 = 1$ でなので

$$= ||Dv_\infty||_{L^2}^2 + ||Dw_\infty||_{L^2}^2 + (t_\infty^2 + m_\infty^2)$$

とくに $t_\infty = 0$ かつ $m_\infty = 0$ でなくてはならない。これは $(m_\infty, t_\infty) \neq (0,0)$ に反するため矛盾である。

以上で Theorem 50 の証明は完結した。 □

[*48] なめらかな楕円型作用素の解は滑らかである。

付録 A　$KO^0(X,A)$ の積の可換性

積 $KO^0(X,A) \times KO^0(X,B) \to KO^0(X,A\cup B)$ の定義 Definition **??** は積をとるふたつの元に対して非対称的な形をしている。しかし、この積は可換である。ここでは可換性があらわになるような積の記述を紹介する。

$[(\mathcal{H},h,\gamma)]$ と $[(\mathcal{H}',h',\gamma')]$ の積を対称的に構成する。

$\mathbf{R}^2$ の上の互いに反可換な次の作用素を考える。

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e := \epsilon\epsilon' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

次の $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'\otimes\mathbf{R}^2$ の作用素はすべて互いに反可換である。

$$\begin{aligned} \hat{h} &:= h\otimes 1\otimes\epsilon \\ \hat{h}' &:= 1\otimes h'\otimes\epsilon' \\ \hat{\gamma} &:= \gamma\otimes 1\otimes\epsilon \\ \hat{\gamma}' &:= 1\otimes\gamma'\otimes\epsilon' \\ \hat{e} &:= 1\otimes 1\otimes e \end{aligned}$$

これらの記号をもちいると、積を次のように構成可能である[*49]。

Definition 54. $KO^0(X,A)\times KO^0(X,B)\to KO^{1,1}(X,A\cup B)$ を上の記号を用いて次のように定義する。

$$([\mathcal{H},h,\gamma)],[\mathcal{H}',h',\gamma']) \mapsto [\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'\otimes\mathbf{R}^2, \hat{h}+\hat{h}', \hat{\gamma}, \hat{\gamma}', \hat{e}\}]$$

一方、Lemma 38 によって

$$KO^{1,1}(X,A\cup B; Cl(\mathbf{R}^{1,2})) \cong KO^0(X,A)$$

であった。この手続きによって上の対称的な積を書き換える。すなわち、二乗して１である Clifford 作用の生成元のうち、二乗して 1 であるものと二乗して -1 であるものをペアにえらび、それらを" キャンセル" させる。すると二乗して 1 の、つかわれずなかった Clifford の生成元が生き残る。のこる生成元として、$\hat{\gamma},\hat{\gamma}'$ のいずれを選ぶのかによって異なる表示が与えられる。しかし、両者の選び方は、連続変形でうつりあえるので、できあがる $KO^0(X,A)$ の要素は同じである。この連続変形を下で具体的に記述する。

[*49] 同様の方法は $KO^i(X,A)\times KO^j(X,B)\to KO^{i+j}(X,A\cup B)$ に対しても可能である。たとえば $KO^1(X,A)\times KO^1(X,B)\to KO^2(X,A\cup B)$ の記述は

$$[(\mathcal{H},h)][(\mathcal{H}',h')] = [(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'\otimes\mathbf{R}^2, h\otimes\epsilon'+\epsilon\otimes h'1\otimes 1\otimes e]$$

となる。

Proposition 55. ふたつの選び方によって次のふたつと同型な三つ組を得る。

$$(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}', h\otimes 1+\gamma\otimes h', \gamma\otimes\gamma'),\qquad (\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}', h\otimes\gamma'+1\otimes h', \gamma\otimes\gamma')$$

とくに、これらの三つ組は、$KO^0(X, A\cup B)$ の同じ要素を与える。

Proof. 自乗して 1 となる $\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}$ を回転によって組み替えて、次のように $\hat{\epsilon}_t, \hat{\gamma}_t$ をとる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_t \\ \hat{\gamma}_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t/2\pi) & -\sin(t/2\pi) \\ \sin(t/2\pi) & \cos(t/2\pi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}' \end{pmatrix}$$

すると各 t に対して次はふたたびすべて互いに反可換である。

$$\hat{h},\quad \hat{h}',\quad \hat{\gamma}_t,\quad \hat{\epsilon}_t,\quad \hat{e}$$

よって各 $0\le t\le 1$ に対して積 $\hat{\epsilon}_t\hat{e}$ は $\hat{h}, \hat{h}', \tilde{\gamma}_t$ と可換である。

ここで $\mathrm{Ker}(\hat{\epsilon}_t\hat{e}-1)$ の上にこれら 3 つの作用素を制限したものを考える。

$t=0$ の場合

$\hat{\epsilon}_0=\hat{\gamma}=\gamma\otimes 1\otimes\epsilon$

$\hat{\gamma}_0=\hat{\gamma}'=1\otimes\gamma'\otimes\epsilon'$

$\hat{\epsilon}_0\hat{e}=\gamma\otimes 1\otimes\epsilon'$

ϵ' の固有ベクトルでない $\mathbf{R}^2$ の要素としてたとえば $(1,0)^T$ をとると次の同型を得る。

$$\phi:\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'\to\mathrm{Ker}(\hat{\epsilon}_0\hat{e}-1),\qquad v\otimes v'\mapsto(\hat{\epsilon}_0\hat{e}+1)\left(v\otimes v'\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

具体的には $v\in\mathcal{H}, v'\in\mathcal{H}'$ に対して、$\gamma v=\pm v$ であるとき、複号同順で

$$v\otimes v'\mapsto v\otimes v'\otimes\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}$$

よって逆写像 ϕ^{-1} は $\mathbf{R}^2$ の上成分への射影によって与えられる。$\mathrm{Ker}(\hat{\epsilon}_0\hat{e}-1)$ の上では

$$\tilde{h}=h\otimes 1\otimes\epsilon,\quad \tilde{h}'=\tilde{h}'\hat{\epsilon}_0\hat{e}=\gamma\otimes h'\otimes 1,\quad \tilde{\gamma}_0=\tilde{\gamma}_0\hat{\epsilon}_0\hat{e}=\gamma\otimes\gamma'\otimes 1$$

であり、ϵ は $\mathbf{R}^2$ の上成分を動かさないので、

$$\phi^{-1}\tilde{h}\phi=h\otimes 1,\qquad \phi^{-1}\tilde{h}'\phi=\gamma\otimes h',\qquad \phi^{-1}\tilde{\gamma}_0\phi=\gamma\otimes\gamma'$$

$t=1$ の場合

$\hat{\epsilon}_1=-\hat{\gamma}'=-1\otimes\gamma'\otimes\epsilon'$

$\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}=\gamma\otimes 1\otimes\epsilon$

$\hat{\epsilon}_1\hat{e}=1\otimes\gamma'\otimes\epsilon$

ϵ の固有ベクトルでない $\mathbf{R}^2$ の要素としてたとえば $(1,1)^T$ をとると次の同型を得る。

$$\psi : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \to \mathrm{Ker}(\hat{\epsilon}_1 \hat{e} - 1), \qquad v \otimes v' \mapsto (\hat{\epsilon}_1 \hat{e} + 1) \left(v \otimes v' \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

具体的には $v \in \mathcal{H}, v' \in \mathcal{H}'$ に対して、$\gamma' v' = \pm v$ であるとき、複号同順で

$$v \otimes v' \mapsto v \otimes v' \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

よって逆写像は $\mathbf{R}^2$ の 2 成分の平均によって与えられる。$\mathrm{Ker}(\hat{\epsilon}_1 \hat{e} - 1)$ の上では

$$\tilde{h} = \tilde{h} \hat{\epsilon}_1 \hat{e} = h \otimes \gamma' \otimes 1, \quad \tilde{h}' = 1 \otimes h' \otimes \epsilon', \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_1 \hat{\epsilon}_1 \hat{e} = \gamma \otimes \gamma' \otimes 1$$

であり、ϵ' は $\mathbf{R}^2$ の 2 成分の平均を動かさないので、

$$\psi^{-1} \tilde{h} \psi = h \otimes \gamma', \qquad \psi^{-1} \tilde{h}' \psi = 1 \otimes h', \qquad \psi^{-1} \tilde{\gamma}_0 \psi = \gamma \otimes \gamma'$$

□

付録 B　$KO^0(X, A)$ の要素の" 有限次元近似" と Fredholm 指数の族版

次の主張の証明は、実際には、Atiyah-Singer による Fredholm 作用素の族に対する指数の構成と同等である。

Remark 56. ただし、次の主張およびその証明は、0 でない次数 i に対する $KO^i(X, A)$ に対しては一般には適用できない。

Theorem 57. $KO^0(X, A)$ の要素 α に対して、α の代表元 $(\mathcal{H}', h', \gamma')$ であって $\mathcal{H}'$ が有限階数の実ベクトル束であるものが存在する。

Proof. アウトラインのみ記す。まず α の任意の代表元 $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ をとる。γ によって $\mathcal{H}$ を固有分解し、次の表示を用いる。

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \qquad h = \begin{pmatrix} 0 & (h^{-+})^* \\ h^{-+} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

● STEP1

Fredholm 作用素 $h^{-+} : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^-$ に対して有限階数のベクトル束 E^- と準同型 $\phi^- : E^- \to \mathcal{H}^-$ であって、$h^{-+} + \phi : \mathcal{H}^+ \oplus E^- \to \mathcal{H}^-$ は全射となるものが存在する[*50]。

● STEP2

[*50] Coker h^{-+} が X の各点の上で有限次元であることを用いて構成される。

$E^+ := \mathrm{Ker}(h_{-+} + \phi)$ に対して、$f^{-+} : E^+ \to E^-$ を $E^+ \subset \mathcal{H}^+ \oplus E^-$ の E^- 成分への射影とする。また $\phi^+ : E^+ \to \mathcal{H}^+$ を $E^+ \subset \mathcal{H}^+ \oplus E^-$ の $\mathcal{H}^+$ 成分への射影とする。このとき次の左と右の四角形で可換な図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, f^{-+} & \longrightarrow & E^+ & \xrightarrow{f^{-+}} & E^- & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\, f^{-+} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & {\scriptstyle \phi^+}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi^-}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, h^{-+} & \longrightarrow & \mathcal{H}^+ & \xrightarrow[h^{-+}]{} & \mathcal{H}^- & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\, h^{-+} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

構成の仕方から、ϕ^+ の制限としてえられる Ker 同士の間の写像は同型であり、ϕ^- から誘導される Coker 同士の間の写像も同型である。さらに、この図式の中央部について、構成の仕方から次が成立する。

1. 中央の四角形は符号をのぞいて可換。すなわち $\phi^- f + h\phi_+ = 0$
2. 左上から発する写像 $f^{-+} + \phi^+ : E^+ \to E^- \oplus \mathcal{H}^+$ は injective
3. 右下に向かう写像 $h^{-+} + \phi^- : \mathcal{H}^+ \oplus E^- \to \mathcal{H}^-$ は surjective

● STEP3

$(\mathcal{H}', h', \gamma')$ を次で定める。これはペア (X, A) に対する三つ組である[*51]。

$$\mathcal{H}' := E^+ \oplus E^-, \qquad h' := \begin{pmatrix} 0 & -(f^{-+})^* \\ -f^{-+} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

● STEP4

$(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim (\mathcal{H}', h', \gamma')$ を示す。

$$(\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}, -h' \oplus h, -\gamma' \oplus \gamma)$$

の作用素 $-h' \oplus h$ を次のように $0 \le t \le 1$ をパラメータとして変形する。

$$\tilde{h}_t := \begin{pmatrix} 0 & (f^{-+})^* & 0 & 0 \\ f^{-+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (h^{-+})^* \\ 0 & 0 & h^{-+} & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\phi^+)^* & 0- \\ 0 & 0 & 0 & (\phi^-)^* \\ \phi^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^- & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで次の分解による行列表示を用いた。

$$\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H} = E^+ \oplus E^- \oplus \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$$

主張を示すには、この変形に対して $t > 0$ のとき $\mathrm{Ker}\, \tilde{h}_t = 0$ であることを見れば十分である。

以下、記号を煩雑にしないため、$t = 1$ の場合にのみ記す。まず $t = 1$ に対して $\tilde{h}_t$ の自乗は次で与えられる。

$$\tilde{h}_1^2 = \begin{pmatrix} (f^{-+})^* f^{-+} + (\phi^+)^* \phi^+ & 0 & 0 & (f^{-+})^* (\phi^-)^* + (\phi^+)^* (h^{-+})^* \\ 0 & f^{-+}(f^{-+})^* + (\phi^-)^* \phi^- & f^{-+}(\phi^+)^* + (\phi^-)^* h^{-+} & 0 \\ 0 & \phi^+(f^{-+})^* + (h^{-+})^* \phi^- & \phi^+(\phi^+)^* + (h^{-+})^* h^{-+} & 0 \\ \phi^- f^{-+} + h^{-+} \phi^+ & 0 & 0 & \phi^-(\phi^-)^* + h^{-+}(h^{-+})^* \end{pmatrix}$$

[*51] 上の図式の Ker 同士および Coker 同士の同型からの帰結である。

ここで一番左下と一番右上の成分は、各々キャンセルしてゼロである。これを用いて計算すると、$\tilde{v} = (x^+, x^-, v^+, v^-)^T$ に対して

$$
\begin{aligned}
||\tilde{h}_1\tilde{v}||^2 = \tilde{v}^T\tilde{h}_1^2\tilde{v} &= ||(f^{-+} + \phi^+)x^+||^2 + ||(\phi^- + f^{-+})^* v^-||^2 \\
&\quad + ||h^{-+}v^+ + \phi^- x^-||^2 + ||(\phi^+)^* v^+ + (f^{-+})^* x^-||^2
\end{aligned}
$$

よって、もし $\tilde{v} \in \operatorname{Ker}\tilde{h}_1$ であれば、右辺のすべての項はゼロである。

- $(f^{-+} + \phi^+)$ および $(\phi^- + f^{-+})^*$ が injective であるから $x^+ = 0$ かつ $v^- = 0$ がわかる。
- また、$h^{-+}v^+ + \phi^- x^- = 0$ から $(x^+, v^-) \in E^+$ である。
- このとき $(\phi^+)^* v^+ + (f^{-+})^* x^-$ とは、$(x^+, v^-) \in E^+ \subset E^- \oplus \mathcal{H}^+$ を埋め込み写像 $E^+ \to E^- \oplus \mathcal{H}^+$ の adjoint によってふたたび E^+ へ写像したものである。
- よって、$(x^+, v^-) \in E^+$ はゼロである。

以上で $\tilde{v} \in \operatorname{Ker}\tilde{h}_1$ に対して $\tilde{v} = 0$ が示された。 □

一時的に次の定義をおく[*52]。

Definition 58. Definition 1, Definition 3, Definition 5 において実 Hilbert 束のかわりにすべて有限階数の実ベウクトル束におきかえて定義されるものを有限階数の三つ組、$\sim_{\mathrm{f}}$, $KO^0_{\mathrm{f}}(X, A)$ とよぶことにする[*53]。

すると上の議論を用いて、さらに次を示すことができる。

Theorem 59. 1. $(\mathcal{H}_0, h_0, \gamma_0), (\mathcal{H}_1, h_1, \gamma_1)$ が有限階数の三つ組であるとき、$(\mathcal{H}_0, h_0, \gamma_0) \sim (\mathcal{H}_1, h_1, \gamma_1)$ と $(\mathcal{H}_0, h_0, \gamma_0) \sim_{\mathrm{f}} (\mathcal{H}_1, h_1, \gamma_1)$ は同値である。

2. 自然な写像 $KO^0_{\mathrm{f}}(X, A) \to KO^0(X, A)$ は同型である。

Proof. ● STEP 1

まず、Theorem 57 の証明において、はじめから $(\mathcal{H}, h, \gamma)$ が有限階数の三つ組であるとき、その証明の構成にあらわれる $(\mathcal{H}', h',$
$gamma')$ は、$(\mathcal{H}, h, \gamma) \sim_{\mathrm{f}} (\mathcal{H}', h', \gamma')$ を満たすことに注意する。

● STEP2

$(\mathcal{H}_0, h_0, \gamma_0), (\mathcal{H}_1, h_1, \gamma_1)$ が有限階数の三つ組であり、$(\mathcal{H}_0, h_0, \gamma_0) \sim (\mathcal{H}_1, h_1, \gamma_1)$ をみたすとする。このとき、$\sim$ の定義によって、ペア $(X \times [0,1], A \times [0,1] \cup X \times \{1\})$ の上にしかるべき条件をもった三つ組が存在する。この三つ組と $\sim$ の関係にある有限階数の三つ組を $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{h}, \tilde{\gamma})$ とおく。このとき、$\tilde{\mathcal{H}}$ は X 上のある有限階数ベクトル束 E を $X \times [0,1]$ の上に引き戻したものと同型である。$\tilde{\gamma}$ の作用についても（同型の取り方をえらぶならば）E 上のある自己写像 γ_E を引き戻したものと一致する。

● STEP3

STEP2,3 は有限階数の三つ組が $\sim$ の関係にあるならば $\sim_{\mathrm{f}}$ の関係にあることを意味する。すなわち求める主張の最初の部分が示された。

[*52] $KO_{\mathrm{f}}(X, A)$ は、位相的 K 群の標準的な定義と同値である。たとえば Atiyah "K-theory" 参照。

[*53] ここだけの記号である。

● STEP4

これは自然な写像 $KO^0_{\mathrm{f}}(X,A) \to KO^0(X,A)$ が単射であることを意味する。一方、Theorem 57 によってこれは全射である。 □

付録 C　格子近似における基本的不等式について

主定理の定式化のために、線形写像 $f_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}$ の構成を行った。主定理の証明では f_a がもついくつかの性質を用いた。以下では、それらの性質の証明の鍵となる性質に対して、簡明な設定の元で証明を与える。具体的には以下では、次の設定をおく。

・トーラス T^n とその格子近似 T^n_a のかわりに Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ とその格子近似 $\mathbf{Z}^n$ を考える。

・接続が自明な場合を考える。

そして下の Proposition 60 を示す。

Proposition 60. V を内積の付与された有限次元実ベクトル空間とする。次の性質をもつうめこみ

$$f : L^2(\mathbf{Z}^n, V) \to L^2(\mathbf{R}^n, V)$$

を具体的に構成することができる。

1. L^2 計量に関する f の adjoint を

$$f^* : L^2(\mathbf{R}^n, V) \to L^2(\mathbf{Z}^n, V)$$

とおくとき、f, f^* はいずれも制限によって次を誘導する

$$f_{L^2_1} : L^2_1(\mathbf{Z}^n, V) \to L^2_1(\mathbf{R}^n, V), \qquad (f^*)_{L^2_1} : L^2_1(\mathbf{R}^n, V) \to L^2_1(\mathbf{Z}^n, V)$$

2. $f : L^2(\mathbf{Z}^n, V) \to L^2(\mathbf{R}^n, V)$ は inclusion であり、n のみに依存する定数 C が存在して

$$||f(\phi)||^2_{L^2} \geq C||\phi||^2_{L^2}$$

が成立する。

Proof. 以下の議論には、主張を示すだけのためには不必要な部分もあるが、詳しく述べる。本来必要な命題は、接続がありねじれている場合であり、その場合にも誤差項を導入すれば同様の命題が成立することが（おそらくは）見やすくなるようにするためである。

● STEP 1

$\rho : \mathbf{R} \to [0,1]$ を $\rho(t) := \max\{0, 1-|t|\}$ によって定め、$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ に対しては

$$\rho(x) := \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i)$$

と書く。

i 成分 $x_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に関する偏微分を ∂_i とかくと

$$\partial_{i_0}\rho(x) = \begin{cases} -\prod_{i\neq i_0}\rho(x_i) & (-1 < x_{i_0} < 0) \\ +\prod_{i\neq i_0}\rho(x_i) & (0 < x_{i_0} < 1) \\ 0 & (|x_{i_0}| > 1) \end{cases}$$

この $\rho(x)$ をカットオフ関数として利用する。

● STEP 2

i 成分のみが 1 であり他の成分が 0 であるベクトルを $e_i \in \mathbf{Z}^n$ とおく。写像

$$\phi : \mathbf{Z}^n \to V$$

と $d \in \mathbf{Z}^n$ に対して

$$\nabla_i\phi(d) := \phi(d + e_i) - \phi(d)$$

とかく。

この ϕ に対して

$$\psi(x) : \sum_{d\in\mathbf{Z}^n} \rho(x-d)\phi(d)$$

とおき

$$f : \phi \mapsto \psi$$

と定義したい。まずこれが L^2-bounded であることをチェックする。

たとえば n 次元の単位立方体

$$(0,1)^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T : 0 < x_i < 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

の内部 $x \in C_0$ において

$$|\psi(x)| \leq \sum_{d_1,\ldots,d_n=0,1} |\phi(d)|$$

とくに

$$|\psi(x)|^2 \leq 2^n \sum_{d_1,ldots,d_n=0,1} |\phi(d)|^2$$

他の単位立方体でも同様であるからこれから

$$||\psi||_{L^2}^2 \leq (2^n)^2||\phi||_{L^2}^2.$$

よって f は L^2bounded である。

● STEP 3

引き続き上の記号 $f : \phi \mapsto \psi$ を用いる。$x \in (0,1)^n$ に対して ∂_1 を考えると

$$\begin{aligned}\partial_1\psi(x) &= +\sum_{d_2,\ldots,d_n} \psi(1, d_2, \ldots, d_n)\prod_{i\neq 1}\rho_i(x_i - d_i) - \sum_{d_2,\ldots,d_n} \psi(0, d_2, \ldots, d_n)\prod_{i\neq 1}\rho_i(x_i - d_i) \\ &= \sum_{d_2,\ldots,d_n} (\nabla_1\psi)(0, d_2, \ldots, d_n)\prod_{i\neq 1}\rho_i(x_i - d_i)\end{aligned}$$

よって

$$|\partial_1\psi(x)| \leq \sum_{d_2,\ldots,d_n=0,1} |(\nabla_1\psi)(0,d_2,\ldots,d_n)|$$

とくに

$$|\partial_1\psi(x)|^2 \leq 2^{n-1} \sum_{d_2,\ldots,d_n=0,1} |(\nabla_1\psi)(0,d_2,\ldots,d_n)|^2$$

これから

$$\int_{x\in(0,1)^n} |\partial_1\psi(x)|^2 dx_1\cdots dx_n \leq 2^{n-1} \sum_{d_2,\ldots,d_n=0,1} |(\nabla_1\psi)(0,d_2,\ldots,d_n)|^2$$

他の単位立方体でも同様であるからこれから

$$||\partial_1\psi||_{L^2}^2 \leq (2^n 2^{n-1})||\nabla_1\phi||_{L^2}^2.$$

よって f の制限によりは L_1^2-bounded map $f_{L_1^2}$ を誘導する。

● STEP4

逆に滑らかかつコンパクト台をもつ $\psi_1 : \mathbf{R}^n \to V$ が与えられたとする。これに対して $\phi_1 : \mathbf{Z}^n \to V$ を次で定義する。

$$\phi_1(d) := \int_{x\in\mathbf{R}^n} \rho(d-x)\psi_1(x)dx$$

すると、次のふたつは等しい

$$\sum_d \phi(d)\phi_1(d) = \sum_d \int_x \phi(d)\rho(d-x)\psi_1(x), \quad \int_x \psi(x)\psi_1(x)dx = \int_x \sum_d \phi(d)\rho(x-d)\psi_1(x)dx$$

よって f の L^2-adjoint map f^* によって

$$f^* : \psi_1 \to \phi_1$$

である。$||\rho||_{L^1} = 1$ に注意する[*54]。Young の不等式から次を得る。

$$||\phi_1||_{L^2}^2 \leq ||\psi_1||_{L^2}^2$$

● STEP 5

$$\nabla_1\phi_1 = \int_x \rho(d+e_1-x)\psi_1(x)dx - \int_x \rho(d-x)\psi_1(x)dx = \int_x \rho(d-x)(\psi_1(x+e_1)-\psi_1(x))dx$$

これから

$$||\nabla_1\phi_1||_{L^2}^2 \leq ||\psi_1(x)-\psi_1(x-e_1)||_{L^2}^2$$

[*54] $\int \rho(t)dt = 1$ による

ここで

$$|\psi_1(x+e_1)-\psi_1(x)|^2 \leq \left(\int_{t=0}^{t=1} |\partial_1\psi_1(x+te_1)|dt\right)^2 \leq \int_{t=0}^{t=1} |\partial_1\psi_1(x+te_1)|^2 dt$$

ここで x_1 方向の積分をしてから $x_2, \ldots x_n$ について積分すると次を得る。

$$||\nabla_1\phi_1||_{L^2}^2 \leq ||\partial_1\psi_1||_{L^2}^2$$

● STEP 6

f が inclusion であることを見る。

$\phi(d)$ に対して $\psi(x) := \sum_d \rho(x-d)\phi(d)$ であった。

一辺の長さが $0 < \delta < 1/2$ である開立方体 $(0,\delta)^n$ の上で

$$\begin{aligned}\psi(x)| &\geq |\rho(x)\phi(0)| - \sum_{\substack{d_1\ldots,d_n=0,1\\(d_1,\ldots,d_n)\neq(0,\ldots,0)}} |\rho(x-d)\phi(d)| \\ &\geq (1-\delta)^n|\phi(0)| - \delta \sum_{\substack{d_1\ldots,d_n=0,1\\(d_1,\ldots,d_n)\neq(0,\ldots,0)}} |\phi(d)|\end{aligned}$$

特に

$$\begin{aligned}|\psi(x)|^2 &\geq (1-\delta)^{2n}|\phi(0)|^2 - 2(1-\delta)^n\delta|\phi(0)| \sum_{\substack{d_1\ldots,d_n=0,1\\(d_1,\ldots,d_n)\neq(0,\ldots,0)}} |\phi(d)| \\ &\geq (1-\delta)^{2n}|\phi(0)|^2 - (1-\delta)^n\delta \sum_{\substack{d_1\ldots,d_n=0,1\\(d_1,\ldots,d_n)\neq(0,\ldots,0)}} (|\phi(0)|^2 + |\phi(d)|^2)\end{aligned}$$

これから

$$\frac{1}{\delta^n}\int_{(0,\delta)^n} |\psi(x)|^2 dx \geq (1-\delta)^n|\phi(0)|^2 - (1-\delta)^n\delta \sum_{\substack{d_1\ldots,d_n=0,1\\(d_1,\ldots,d_n)\neq(0,\ldots,0)}} (|\phi(0)|^2+|\phi(d)|^2) \sum$$

上は $(0,\ldots,0)$ を頂点とする立方体 $(0,\delta)^n$ についての積分である。他の立方体についても同様である。$d \in \mathbf{Z}^n$ をひとつの頂点とする立方体は 2^n 個ある。それらに対する類似した不等式をすべて総和すると

$$\frac{1}{\delta^n}||\psi||_{L^2}^2 \geq 2^n\{(1-\delta)^{2n}|\phi(0)|^2 - 2(1-\delta)^n(2^n-1)\}||\phi||_{L^2}^2$$

よって $0 < \frac{1}{2(2^n-1)}$ となるようにとるとき、

$$||\psi||_{L^2}^2 \geq C||\phi||_{L^2}^2$$

が $C = (2\delta)^n(1-\delta)^n(1-2\delta(2^n-1))$ に対して成立する。 □

付録 D　参考文献

●位相的 K 群の標準的な定義とその性質を説明している教科書。

Atiyah "K-theory" が代表的である。

複素ベクトル束を用いた $K^i(X,A)$ の構成と性質が説明されている。Appendix に KR 理論を利用して $KO^l(X,A)$ の構成と性質も記述されている。

Atiyah "K-theory" における構成の順序である。

・$K^0(X,\emptyset)$ を、Grothiendieck 群の構成を利用して定義する

・$K^0(X,A)$ は基点の埋め込み $\{*\}\to X/A$ を利用して

$$K^0(X,A) := \mathrm{Ker}(K(X/A,\emptyset)\to K(\{*\},\emptyset)$$

として定義されている。

・ それがこの予稿における $K^0_{\mathrm{f}}(X,A)$（すなわち KO^0 の定義において実 Hilbert 束をすべて有限階数の複素ベクトル束におきなおしたもの）と同等であることも示されている。

・degree の導入はまず $p>0$ に対して

$$K^{-p}(X,A) := KO^0((X,A)\times(D^p,S^{p-1}))$$

・そのあとで periodicity

$$K^{i-2}(X,A)\cong K^i(X,A), \qquad KO^{i-8}(X,A)\cong KO^i(X,A)$$

を確立することによって、$i>0$ に対する $K^i(X,A), KO^i(X,A)$ を構成。

● Bott 周期性の分類空間を直接みる証明。

Fredholm 作用素と Clifford 代数の対称性を用いた議論は

Atiyah-Singer, Index theory for skew-adjoint fredholm operators Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques volume 37, pages5–26(1969)

この議論とパラレルな議論を有限階数のベクトル束だけの範囲で遂行することは、McDuff, Harris, Aguilar-Gitler-Prieto, Behrens 達によって行われている。

また、Milnor,Morse theory の最後の章に Clifford 代数の作用と Riemann 対称空間の測地線の空間を用いた証明がある。

● Bott 周期性の、位相的 K 理論による定式化を用いた証明

上記の Atiyah "K-theory" に有限階数のベクトル束の範囲の証明がある。

なお、Bott 周期性の証明の、族の指数を援用した証明が次にある。

Atiyah, Bott Periodicity and the index of elliptic operators, The Quarterly Journal of Mathematics, Volume 19, Issue 1, 1 January 1968, Pages 113–140

Bott 要素をかける操作で定義される写像の逆写像を族の指数によって与えられている。

●族の指数が導入とそれに対する指数定理の証明

Atiyah-Singer, The Index of Elliptic Operators: IV

Annals of Mathematics Second Series, Vol. 93, No. 1 (Jan., 1971), pp. 119-138, https://www.jstor.org/stable/1970756

● Clifford 代数の対称性を用い有限階数のベクトル束のみを用いる K 理論の展開。

特にこの方法で Bott 周期性が次で証明されている。

Karoubi, K-theory : An ntroduction

この本で事実上証明されていることは I

「$KO^{i+1}((X,A)\times(D^1,S^0))$ の要素は Clifford 代数の対称性が付与された $(\mathcal{H},h)$ として、$\mathcal{H}$ が有限階数のベクトル束である範囲で記述が可能であること」である。

Bott 周期性を踏まえると、この記述をもって $KO^i(X,A)$ の記述の定義として採用することが可能である。これが Karoubi の方法のひとつの解釈である[*55]。

なお Hilbert 束を用いた理論構成としては次がある。

五味清紀, Freed-Moore K-theory arXiv:1705.09134

●格子上の Dirac 作用素の指数とその連続版の指数との比較の数学的議論

David Adams, On the continuum limit of fermionic topological charge in lattice gauge theory, Math.Phys. 42 (2001) 5522-5533 e-Print: hep-lat/0009026

Dirac 作用素の指数の熱核による表示の離散版を考察した。格子間隔を小さくするときその表示が、連続版の Dirac 作用素の指数を表す熱核の表示に収束することを示した。

●格子ゲージ理論の文脈で指数の扱い[*56]。

・指数の数値的な扱い

The U(1) Problem and Topological Excitations on a Lattice S. Itoh, Y. Iwasaki, Phys. Rev. D 36, 527, 1987

・指数定理の成立について

The Index theorem in QCD with a finite cutoff Peter Hasenfratz, Victor Laliena, Ferenc Niedermayer, Phys.Lett.B 427 (1998) 125-131 • e-Print: hep-lat/9801021

Weak coupling expansion of massless QCD with a Ginsparg-Wilson fermion and axial U(1) anomaly Yoshio Kikukawa, Atsushi Yamada, Phys.Lett.B 448 (1999) 265-274 • e-Print: hep-lat/9806013

・Wilson 項の導入による作用素の評価 ：次の論文で、本予稿のアプリオリ評価を

---

*55 なお、Karoubi の方法では積の定義が技術的に複雑になる。これは、積が自然には

$$KO^{i+1}((X,A)\times(D^1,S^0))\times KO^{j+1}((Y,B)\times(D^1,S^0))\to KO^{i+j+2}((X,A)\times(Y,B)\times(D^1,S^0)^2)$$

として定義され、この行き先を $KO^{i+j+1}((X,A)\times(Y,B)\times(D^1,S^0))$ と同一視するためには、懸垂同型を経由する必要があるからであると理解できると思われる。

*56 物理の文献は深谷英則氏に紹介してもらった文献を参考にしている。(私自身は目をとおしていないものもあり、すみません。網羅的ではまったくありません。)

示す議論と類似した評価がなされている。

Hernandez Jansen Luescher, Locality properties of Neuberger's lattice Dirac operator Pilar Hernandez, Karl Jansen, Martin Luscher, Nucl.Phys.B 552 (1999) 363-378, e-Print: hep-lat/9808010

・アノマリーの教科書

Kazuo Fujikawa, Hiroshi Suzuki, Path Integrals and Quantum Anomalies - Oxford University Press

この本のひとつの章に、 Fujikawa の方法による Overlap fermion の指数の計算が説明されている。

●格子に対する指数定理

2020 年になってからふたつの定式化がある。これらは今後のひとつの方向を与えていると思われる。

・山下真由子

A lattice version of the Atiyah-Singer index theorem, arXiv:2007.06239

格子上の作用素に対して指数定理のひとつの定式化が与えられている。連続版との比較も、この定式化の系として得られる。

・窪田陽介・山下真由子 in preparation