解析学特別演習 II・小テスト解説 (4)

1999 年 11 月 30 日

河東泰之

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] から順に 30, 10×4, 30 点です．採点は teaching assistant の船越君です．平均は 53.5 点，最高は 100 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] $\hat{f}(\xi)\hat{f}(\xi)=\pi^2 e^{-|2\xi|}$ を逆 Fourier 変換して，$\dfrac{2\pi}{4+x^2}$ が答えである．

[2] (1) 普通に計算して

$$\frac{-2i}{\pi}\sum_{n:\mathrm{odd}}\frac{1}{n}e^{inx}$$

である．

(2) $f(x)$ は，$(\pi,0),(0,\pi)$ で微分可能で微分したものは有界である．つまり 11/9 にやった定理の条件を満たしているので，Fourier 級数 ($\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}$ としたもの) は各点収束している．

(3) $f(x)$ は L^2 なので，もちろん Fourier 級数は $f(x)$ に L^2-収束している．

(4) Fourier 級数が，$f(x)$ に一様絶対収束していれば $f(x)$ は連続になるはずだが，そうなっていないので一様絶対収束していない．

[3] いろいろ方法はあるがたとえば，授業でやった $[-\pi,\pi]$ での x^2 の Fourier 級数展開

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$$

の両辺の L^2-norm を比べると，

$$\frac{2\pi^5}{5}=\frac{2\pi^5}{9}+16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

となって，答え $\pi^4/90$ を得る．