解析学特別演習 II・小テスト解説 (3)

1999 年 11 月 9 日

河東泰之

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] から順に 40, 30, 30 点です．平均は 24.9 点，最高は 98 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] 一番簡単な方法は，こういうものでしょう．授業でやったとおり，$e^{-|x|}$ の Fourier 変換は $\dfrac{2}{1+\xi^2}$ なので，逆変換したものの変数を書き換えて，$\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換は $\pi e^{-|\xi|}$ です．あとは $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ として $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換に持ちこめば，答えは $\dfrac{\pi}{2}(e^{-|\xi+1|}+e^{-|\xi-1|})$ になります．

留数で直接やっても，それほどは難しくありませんが，ξ の値によってちゃんと場合わけすることが必要で，みんなかなり間違えていました．授業でも言ったとおり，$|\xi| \to \infty$ のときに 0 に収束していないようなものは明らかに誤りですから，そういう答えを書いていていてはいけません．

[2] これは直接留数でやろうとすると，ちゃんとできている人もいましたが，さらにめんどうです．次のようにやればかなり簡単にできます．

授業でやったとおり，$\chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換が $\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$ ですから，$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換が $\dfrac{4\sin^2\xi}{\xi^2}$ です．これを逆変換でもどした式で変数を書きかえれば，答えは

$$\frac{\pi}{2}\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(\xi) = \begin{cases} \pi(1+\xi/2), & -2 \le \xi \le 0 \text{ のとき}, \\ \pi(1-\xi/2), & 0 \le \xi \le 2 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき}, \end{cases}$$

になります．

[3] $f(x+iy)$ と書いて，x, y で偏微分すると，積分記号下の微分ができる形になっていて，Cauchy-Riemann 方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が成り立ちます．だから正則です．(積分記号下の微分ができる理由をちゃんと書かなければ当然減点です．)