解析学特別演習 II・小テスト解説 (5)

1999 年 12 月 14 日 河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] から順に 40, 30, 30 点です．平均は 48.3 点，最高は 90 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] Test function φ を一つとめて考えれば，その support は compact 集合なので，すぐに結論が出る．

[2] まず，$\log|x|$ は局所可積分だから $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の元と見なせる．
次に微分の方は，定義どおり書いたものの積分区間を $(-\infty,-\varepsilon)$ と (ε,∞) に分けてそれぞれ部分積分してから $\varepsilon\to 0+$ とすれば，答えは p.v. $\dfrac{1}{x}$ であることがわかる．

[3] まず，$\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\langle e^{inx}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x},\varphi\rangle\\
&=\int_{|x|\geq 1}\frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{|x|\leq 1}\frac{e^{inx}\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\\
&=\int_{|x|\geq 1}\frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}e^{inx}\,dx+\int_{|x|\leq 1}\varphi(0)\frac{e^{inx}-1}{x}\,dx
\end{aligned}$$

である．ここで $n\to\infty$ とすると，Riemann-Lebesgue の定理より，第 1 項，第 2 項は 0 に収束する．一方第 3 項は

$$i\varphi(0)\int_{-1}^{1}\frac{\sin nx}{x}\,dx=i\varphi(0)\int_{-n}^{n}\frac{\sin x}{x}\,dx\to\pi i\varphi(0)$$

に収束するので答えは，$\pi i\delta$ である．