2019 年解析学特別演習 III テスト (3) 解答解説

2019 年 11 月 20 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点で，平均点は 79.0 点，最高点は 100 点 (10 人) でした．

[1] 授業でやった通り，$\dfrac{1}{\cosh x}$ の Fourier 変換は $\dfrac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}\xi}$ です．部分積分により，求める答えは $\left(\dfrac{\pi i}{\cosh \frac{\pi}{2}\xi}\right)'$ であり，$-\dfrac{\pi^2 i}{2}\dfrac{\sinh \frac{\pi}{2}\xi}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}\xi}$ となります．

[2] $a>0$ を定数としたとき，$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ の Fourier 変換は $\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$ です．このことから，$f(x), g(x)$ の Fourier 変換は $\dfrac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}$, $\dfrac{\pi}{3}e^{-3|\xi|}$ となります．$f(x), g(x)$ は可積分なので，$f*g(x)$ の Fourier 変換は $\dfrac{\pi^2}{6}e^{-5|\xi|}$ となります．これは可積分なので，Fourier 逆変換して，$f*g(x)=\dfrac{5\pi}{6(25+x^2)}$ a.e. を得ます．右辺は連続関数で，また f が有界連続，g が可積分なことより，Lebesgue の収束定理によって，左辺も連続関数となります．よって，すべての x について $f*g(x)=\dfrac{5\pi}{6(25+x^2)}$ を得ます．

[3] 上の問題と同様にして，$f*f*\cdots*f(x)$ の Fourier 変換は $\pi^k e^{-k|\xi|}$ です．これを Fourier 逆変換して，$f*f*\cdots*f(x)=\dfrac{k\pi^{k-1}}{k^2+x^2}$ a.e. を得ます．上の問題と同様の理由で，これはすべての x について成り立ちます．

[4] まず $\dfrac{1}{\cosh x}$ が C^∞ 級であることは明らかです．次に『$\dfrac{1}{\cosh x}$ の n 階微分は $\dfrac{\sinh^k x \cosh^{n-k} x}{\cosh^{n+1} x}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ の 1 次結合である．』という主張を n についての帰納法で証明します．

$n=0$ については正しくなっています．n で正しいとして，$n+1$ の場合を示します．$\dfrac{\sinh^k x \cosh^{n-k} x}{\cosh^{n+1} x}$ を微分すると，

$$\frac{k\sinh^{k-1} x\cosh^{n+2-k} - (k+1)\sinh^{k+1} x\cosh^{n-k}}{\cosh^{n+2} x}$$

となるので，帰納法が働きます．これで『』内の主張が証明できたので，これに $|x|^m$ をかけて $|x|\to\infty$ としたものを見れば，確かに 0 に収束しています．