2019 年解析学特別演習 III テスト (6) 解答解説

2020 年 1 月 8 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点で，平均点は 43.2 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] まず左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}g(\xi)\,dx\,d\xi$$

ですが，被積分関数に絶対値を付けて 2 回積分すると $\|f\|_1\|g\|_1$ となって有限なので，Fubini の定理が使えて積分の順序交換ができます．すると右辺が得られます．

[2] まず，f を L^1 関数と思って Fourier 変換して得られる連続関数を超関数と思ったものと，f を緩増加超関数と思って Fourier 変換したものは同じです．前者が L^2 関数という仮定なので，後者も L^2 関数を緩増加超関数と思ったものです．緩増加超関数の Fourier 変換の一般論より，後者を Fourier 逆変換したものは f (を緩増加超関数と思ったもの) です．一方，後者は L^2 関数を緩増加超関数と思ったものなので，その Fourier 逆変換は L^2 関数 (を緩増加超関数と思ったもの) です．したがって f はある L^2 関数と，超関数として一致するので，f 自身が L^2 関数になります．

[3] (1) まず f は局所可積分なので超関数と思えます．$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)\varphi(x)|\,dx &\le 2p_2(\varphi)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{|f(x)|}{1+x^2}\,dx\\ &\le 4p_2(\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+4n^2\pi^2}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

なので f が緩増加超関数になることがわかります．

(2) $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle f,\hat\varphi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} f(x)\hat\varphi(x)\,dx\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x)\hat\varphi(x+2n\pi)\,dx\end{aligned}$$

ですが，Poisson の和公式 (の証明) から

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat\varphi(x+2n\pi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)e^{-inx}$$

が，$[0, 2\pi]$ 上一様絶対収束の意味で成り立っています．このことから最初の等式の最右辺は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(n)$$

に等しくなります．このことから，答えは $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta_n$ です．

[4] (1) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し，$\mathrm{supp}\ \varphi \subset [-K, K]$ とすると，$|n\hat{\varphi}(n)| \le 2K \sup |\varphi'(x)|$ です．この評価と，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ と合わせると $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \hat{\varphi}(-n)$ は収束します．さらにこの評価より，$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ が超関数として収束していることがわかります．

(2) 任意に $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ を取り，$\mathrm{supp}\ \varphi \subset [-2M\pi, 2M\pi]$ となる自然数 M を取ります．$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-k}^{k} a_n e^{inx}$ は，$k \to \infty$ のとき，$[0, 2\pi]$ 上で $f(x)$ に L^2 収束するので，$[-2M\pi, 2M\pi]$ 上でも $f(x)$ に L^2 収束します．$\varphi(x)$ は，$[-2M\pi, 2M\pi]$ 上 L^2 なので結論が出ます．

実際は [3] (2) のような論法で，$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ で収束していることも示せます．