2019 年解析学特別演習 III テスト (6)

2019 年 12 月 26 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．(ノートをデジタル的にとっている人については，プリントアウトの持ち込みを認めます．) 計算用紙はありません．自分のノート等を使ってください．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．次の等式を示せ．

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx.$$

[2] $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ であれば $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ であることを示せ．

[3] $f(x)$ を $L^1([0, 2\pi])$ の元とし，その Fourier 係数を a_n $(n \in \mathbb{Z})$ とする．$f(x)$ を周期 2π の関数になるように，定義域を $[0, 2\pi)$ から $\mathbb{R}$ に拡張し，これも $f(x)$ と書く．

(1) この f が，$\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数とみなせることを示せ．

(2) この f を $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数として Fourier 変換したものを求めよ．

[4] $f(x)$ を $L^2([0, 2\pi])$ の元とし，その Fourier 係数を a_n $(n \in \mathbb{Z})$ とする．$f(x)$ を周期 2π の関数になるように，定義域を $[0, 2\pi)$ から $\mathbb{R}$ に拡張し，これも $f(x)$ と書く．

(1) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ が $\mathbb{R}$ 上の超関数として収束することを示せ．

(2)(1) の超関数が，$\mathbb{R}$ 上の $f(x)$ を超関数とみなしたものと一致することを示せ．